ANUL XXIII. MARTIE 1943 No. 1.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU**: CEVA DESPRE PARABOLA.
2. **TH. ANGHELUTA**: FORMAREA ECUATIEI, ALE CAREI RADACINI, SUNT VALORILE RAPORTULUI ANARMONIC, ALE RADACINILOR UNEI ECUATII DE GRADUL AL PATRULEA.
3. **D. V. IONESCU**: PROPRIETATI ALE TETRAEDRULUI.
4. NOTE MATEMATICE 1, 2.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1927, 1998, 1999, 2005, 2007, 2008, 2013, 2014, 2020, 2021.
7. PROBLEME PROPUSE: 2114–2121.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Imprimeria Arhiepiscopiei Tipografia Romînească

38676

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu mare părere de rău pierderea distinsului membru din Comitetul de Conducere al „R. M. T." GHEORGHE LAMBRINO, Dr. în drept şi Economie Politică, Conferenţiar de Economia Politică şi Legislaţie Industrială la Politehnica Timişoara, precum şi Preşedinte la Secţia III-a a Curţii de Apel din Timişoara.

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anton Ioan, (1962, 1981, 2006, 2076, 2098); **Barbu Virgil,** (2034, 2036, 2038, 2041, 2043, 2047, 2048, 2005, 2052, 2054, 2056); **Belea C. Gh.,** (2029, 2038, 2054, 2085, 2088); **Dăscălescu Hristache,** (Lt.) (2028, 2029, 2030, 2033, 2036, 2038, 2041, 2043, 2052, 2054, 2057); **Dobrescu Eugen,** (N. P.); **Enăchescu Gr. Ion,** (2084, 2097, 2098, 2104, 2106, 2113). **Gâţă Gh. Gheorghe,** (1842, 1843, 1844, 1850, 1890, 1900, 1903, 2098); **Georgescu C. Nicolin,** (2059, (2059, 2063, 2082, 2094, 2096, 2098); **Grozescu Liviu,** (P; 2039, 2072, 2084, 2087, 2097, 2098); **Ieşan Alexandru,** (2088, 2098, 2106); **Kinsky Ioan, (P;** 2094, 2098, 2101, 2103, 2104); **Knopf Adalbert,** (2036, 2084, 2088, 2098); **Knopf Hermann,** (P; 2023, 2038, 2043, 2084, 2098); **Mahrenholz Johannes,** (N; P; 2091, 2092, 2095, 2097, 2098, 2099, 2105); **Muţiu S. Antim,** (2030, 2076, 2084, 2089, 2098, 2106; **Păläceanu D. Vasile,** (2029, 2034, 2037, 2038, 2039, 2085, 2106, 2110); **Păliceanu I. Vasile,** (2075, 2077, 2084, 2091); **Sasu Ion,** (2041, 2043, 2066, 2087, 2098); **Şipoş Eugen,** (N; P; 1984, 2072, 2085, 2098); **Ştefănescu Marin,** (Lt.), (A; P; 2034, 2036, 2038, 2050, 2052, 2054, 2055, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2098, 2103); **Strejea N. Iorga,** (2106); **Wigh Ioan,** (2047, 2095, 2098, 2103); **Vrânceanu Gh. Gheorghe,** (2082, 2106).

Cu plăcere anunţăm, că începând dela 15 Februarie 1943 mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi D-l *Ionel Stamate,* licenţiat în Matematici, distins corespondent al „R. M. T."

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

ANUL XXIII — No. 1 TIMISOARA, MARTIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politehnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN
Şcoala Politehnică, Timişoara.

CEVA DESPRE PARABOLĂ

DE

D. POMPEIU.

1. Proprietăţile de care ne vom ocupa în cele ce urmează, nu le semnalăm aci cu vre-un gând de *prioritate:* fiind vorba de proprietăţi elementare, ele se pot găsi prea bine, ca exerciţii, în manuale de şcoală. Noi, semnalându-le aci, dorim numai să le fixăm în atenţia cititorilor, pentru că aceste proprietăţi sunt practic utile mai ales în ştiinţele aplicate.

2. Pe elipsă şi pe iperbolă (conice cu centrul la distanţă finită) se pot defini *şiruri regulate de puncte,* considerând *sectoare* de arie constantă având vârful în centrul conicei.

La parabolă centrul fiind la infinit, ce devine proprietatea de la elipsă şi de la iperbolă?

Iată o construcţie care răspunde la aceeastă întrebare:

Să luăm, în plan, trei puncte A, B, C, nu în linie dreaptă.

Din A, ducem o paralelă, de acelaş *sens* cu B C şi ca lungime: de *trei* ori mai mare ca B C.

Obţinem astfel punctul D.

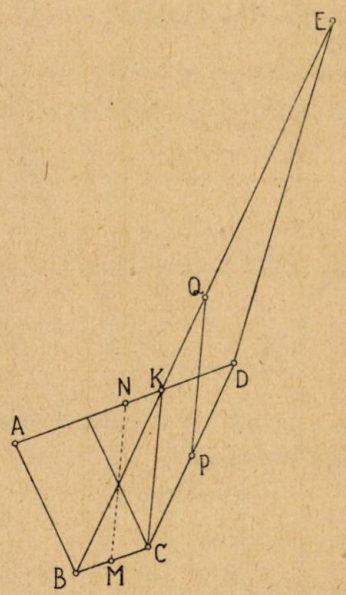
Apoi, pentru punctele B, C, D, facem aceiaşi construcţie.

Din B ducem o paralelă, de acelaş *sens* cu C D şi, ca lungime: de *trei* ori mai mare ca C D.

Obţinem astfel punctul E... şi putem continua operând cu punctele C, D, E, formând astfel un şir regulat de puncte.

Dar, fiind că prin obţinerea lui E avem *cinci* puncte: A, B, C, D, E, putem observa că aceste cinci puncte definesc în mod *unic* o conică. Rămâne de precizat numai *genul* ei. Dar, prin construcţiile ce am făcut, răspunsul e imediat.

În adevăr, în conica definită prin cele cinci puncte, avem în B C şi A D două coarde paralele: deci putem avea un diametru al conicei, unind mijlocul M al coardei B C cu mijlocul N al coardei A D.



Tot aşa, un al doilea diametru poate fi obţinut, de la cele două coarde paralele C D şi B E, unind mijlocul P a lui C D cu mijlocul Q al coardei B E.

Însă dreptele M N şi P Q sunt paralele cu C K (punctul K: intersecţia lui A D cu B E), deci paralele între ele. Şi astfel centrul conicei e la infinit şi conica e o *parabolă.*

3. Noi am indicat construcţiile care dau în sensul A B C... şirul regulat de puncte pe parabolă. Dar, putem opera şi în sensul C B A şi obţinem atunci şi in acel sens şirul de puncte de pe parabolă.

4. Când, trecând de la primele *cinci* puncte, obţinem pe al şaselea F, e interesant raţionamentul care arată că acest punct e tot pe parabola

definită de A B C D E... Cititorul îl va găsi uşor, utilizând echivalenţa sistemelor de condiţii care definesc o parabolă.

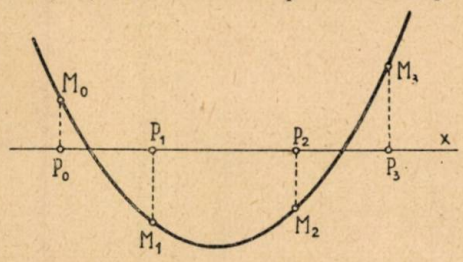
5. În loc de sectoare cu vârful în centrul unei conice (elipsă sau iperbolă) dacă se iau, pe o conică, *segmente* de arie constantă, atunci avem un procedeu uniform pentru a obţine şiruri regulate de puncte, or care ar fi genul conicei.

6. Revenind la parabolă şi la problema de a determina, pe o parabolă, un şir *orcare* de puncte — să considerăm o dreaptă perpendiculară pe axa parabolei (axa Ox din Geometria Analitică) şi pe această dreaptă un şir de puncte:

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots$$

absolut orcare.

Ordonatele P_0M_0 P_1M_1 şi P_2M_2, paralele cu axa parabolei, determină complet această parabolă.



Chestiunea e acum de a găsi o relaţie simplă care să ne dea ordonata

$$Y_3 = P_3M_3$$

în funcţie de distanţele

$$P_0P_1 = a,\quad P_1P_2 = b,\quad P_2P_2 = c$$

(numere esenţial *pozitive:* distanţe) şi de ordonatele

$$Y_0 = P_0M_0,\quad Y_1 = P_1M_1,\quad Y_2 = P_2M_2$$

numere *algebrice* (pozitive sau negative).

Relaţia căutată este

$$(1)\quad Y_0\,b\,c\,(b+c) - Y_1\,(a+b)\,c\,(a+b+c) + Y_2\,a\,(b+c)\,(a+b+c) - Y_3\,a\,b\,(a+b) = 0.$$

Relaţia aceasta permite ca, de la orce grup de trei puncte să trecem la un al patrulea punct de pe parabolă.

Cititorul poate lesne stabili formula (1) dacă întrebuinţează, pentru ecuaţia parabolei, în loc de obişnuita formă

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2,$$

forma lui *Lagrange* pentru polinomul de gradul doi.

FORMAREA ECUAŢIEI, ALE CĂREI RĂDĂCINI, SUNT VALORILE RAPORTULUI ANARMONIC, ALE RĂDĂCINILOR UNEI ECUAŢII DE GRADUL AL PATRULEA.

DE

TH. ANGHELUŢĂ.

1. Fie $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ rădăcinile ecuaţiei algebrice

$$(1)\qquad x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0.$$

Expresia următoare

$$(2)\qquad A(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$$

se numeşte raportul anarmonic, al numerelor x_1, x_2, x_3, x_4. Este de observat că valorea raportului anarmonic depinde de ordinea acestor numere. Cu patru numere putem forma $4! = 24$ permutări. S'ar părea că raportul anarmonic are atâtea valori câte permutări. Ştim însă că numai 6 din aceste valori sunt deosebite. De altfel din cele ce urmează va rezulta această concluzie.

Ne propunem să dăm o metodă pentru formarea ecuaţiei algebrice, ale cărei rădăcini sunt cele 6 valori ale raportului anarmonic. D-l Prof. *G. Călugăreanu* a avut de rezolvit această problemă într'o cercetare de geometrie şi i-a dat o soluţie, care a fost expusă într'o şedinţă a Seminarului de Matematici al Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Clujene. Soluţia propusă aici are cred avantajul de a fi mai directă şi de a pune în evidenţă o legătură dintre raportul anarmonic şi o ecuaţie de gradul al 3-lea, rezolvantă a ecuaţiei (1).

Pentru aceasta, voiu reaminti pe scurt metoda lui *Lagrange*, pentru rezolvirea ecuaţiei de gradul al 4-lea. *Lagrange* observă că expresia $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ are numai trei valori pentru cele 24 permutări, ale numerelor x_1, x_2, x_3, x_4 şi anume y_1 şi următoarele două $y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$; $y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$.

Ecuaţia de gradul al 3-lea în y

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) + y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)\,y^2 + (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)\,y - y_1y_2y_3 = 0$$

are coeficienţii polinoame simetrice în x_1, x_2, x_3, x_4. Prin urmare, aceşti coeficienti sunt raţionali în

raport cu a, b, c, d. În adevăr, ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei (1), se găseşte ecuaţia rezolvantă

(3) $$y^3-by^2+(4ac-d)y+d(4b-a^2)-c^2=0.$$

Cunoscând rădăcinile acestei ecuaţii, se pot obţine rădăcinile ecuaţiei (1), rezolvind ecuaţii de gradul al 2-lea, după cum se vede lesne. În cele ce urmează n'avem nevoie decât de ecuaţia (3).

Înainte de a trece la problema propusă, poate este util să spun că metoda aceasta a lui *Lagrange* este începutul teoriei rezolvirii *logice* a ecuaţiilor algebrice. *Lagrange* şi *Cauchy* au deschis calea rezultatelor fundamentale obţinute de *Abel* şi desăvârşite de *Galois.*

2. Raportul anarmonic (2) se poate scrie

$$A=\frac{(x_4-x_1)(x_3-x_2)}{(x_4-x_2)(x_3-x_1)}=\frac{x_1x_3+x_3x_4-(x_1x_3+x_2x_4)}{x_1x_2+x_3x_4-(x_1x_4+x_2x_3)},$$

notând pentru prescurtare A în loc de $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Ţinând seamă de notaţiile de mai sus, avem

(4) $$A=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}.$$

La această expresie a raportului anarmonic m'am referit la începutul acestor rânduri. De aici, rezultă numai de cât că raportul anarmonic ia numai 6 valori deosebite, când permutăm rădăcinile ecuaţiei (1), de oarece aceasta revine a permuta rădăcinile y_1, y_2, y_3. Obţinem, astfel rapoartele

$$A=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3},\quad \frac{1}{A}=\frac{y_1-y_3}{y_1-y_2},\quad A_1=\frac{y_2-y_3}{y_2-y_1},$$

$$\frac{1}{A_1}=\frac{y_2-y_1}{y_2-y_3},\quad A_2=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2},\quad \frac{1}{A_2}=\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1},$$

care se pot exprima în funcţie de primul:

$$A,\ \frac{1}{A},\ 1-A,\ \frac{1}{1-A},\ 1-\frac{1}{A},\ \frac{1}{1-\frac{1}{A}},$$

Să formăm ecuaţia, care are numai aceste rădăcini. Pentru uşurinţa calculului voiu transforma ecuaţia (3), punând $y=v+\frac{b}{3}$.

Rezultă ecuaţia, fără termenul în v^2,

(5) $$v^3+\alpha v+\beta=0$$

cu notaţiile $\alpha=P'\left(\frac{b}{3}\right)$, $\beta=P\left(\frac{b}{3}\right)$, polinomul $P(y)$ fiind primul membru al ecuaţiei (3). Notând rădăcinile ecuaţiei (5) cu v_1, v_2, v_3, valorile raportului anarmonic păstrează aceiaşi formă ca primul raport cu y_1, y_2, y_3. Ecuaţia, care are rădăcini numai aceste valori, este reciprocă. Ca să formăm această ecuaţie, vom forma întâi ecuaţia ale cărei rădăcini sunt

$$u=A+\frac{1}{A},\quad u_1=A_1+\frac{1}{A_1},\quad u_2=A_2+\frac{1}{A_2}$$

şi care se poate deduce uşor. În adevăr, avem

$$u=\frac{(v_1-v_2)^2+(v_1-v_3)^2}{(v_1-v_3)(v_1-v_2)}=$$

$$\frac{v_1^2+(v_1+v_2+v_3)^2-2(v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)-2v_1(v_2+v_3)}{v_1^2-v_1(v_2+v_3)+v_2v_3},$$

sau, ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei (5),

$$u=\frac{3v_1^3-2\alpha v_1}{2v_1^3-\beta}=\frac{5\alpha v_1+3\beta}{2\alpha v_1+3\beta},$$

de unde

$$v_1=-\frac{3\beta}{\alpha}\cdot\frac{u-1}{2u-5}$$

şi prin urmare, avem ecuaţia în u

$$27\beta^2(u-1)^3+3\alpha^3(u-1)(2u-5)^2-\alpha^3(2u-5)^3=0,$$

sau încă sub forma

$$27\beta^2(u-1)^3+\alpha^3(2u-5)^2(u+2)=0.$$

Substituind în această ecuaţie, lui u, valoarea v în funcţie de A, obţinem ecuaţia căutată

$$27\beta^2(A^2-A+1)^3+\alpha^3(A+1)^2(2A-1)^2(A-2)^2=0.$$

Ecuaţia are rădăcina $A=-1$, dacă $\beta=0$. Aceasta este condiţia ca rădăcinile ecuaţiei (1) să formeze o diviziune armonică [1].

Mai observăm că ecuaţia depinde numai de raportul $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$.

---

[1]) *Th. Angheluţă.* Curs de Algebră Superioară, Vol. I, p. 219, Exerciţiul 18.

PROPRIETĂŢI ALE TETRAEDRULUI

DE

D. V. IONESCU.

În „Gazeta Matematică“, vol. XLVI, p. 230, am demonstrat următoarea proprietate:

Se consideră tetraedrul $SABC$ şi pe muchile lui SA, SB, SC se iau punctele A', B', C'. Planele $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ se tae într'un punct M, iar planele $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ se tae într'un alt punct M'. *Punctele* S, M, M' *sunt colineare.*

Iată o demonstraţie elementară a acestei proprietăţi.

1. Fie A_1 intersecţia dreptelor BC', CB'; B_1 intersecţia dreptelor CA', AC'; C_1 intersecţia dreptelor AB', BA'; A_2, B_2, C_2 intersecţiile dreptelor SA_1, SB_1, SC_1 cu faţa ABC.

Dreptele AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente într'un punct* I.

Într'adevăr, fie A_3, B_3, C_3 intersecţiile $(B'C', BC)$, $(C'A', CA)$, $(A'B', AB)$. Punctele A_3, B_3, C_3 sunt pe dreapta Δ de intersecţie a planului $A'B'C'$ cu planul ABC.

A_2, B_2, C_2 sunt conjugatele armonice ale punctelor A_3, B_3, C_3 în raport cu BC, CA şi AB. Rezultă atunci, după o teoremă bine cunoscută, că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

2. Planele $B'CA$, $C'AB$ se taie după dreapta AA_1. Punctul M este deci la intersecţia dreptei AA_1 cu planul $A'BC$. Dreapta $A'A_2$ din planul $A'BC$, întâlneşte dreapta AA_1, tocmai în punctul M. Deci punctul M se găseşte în planul SAA_2. La fel se arată că punctul M se găseşte în planele SBB_2 şi SCC_2, de unde rezultă că M *este pe dreapta* SI.

3. Planele $BC'A'$, $CA'B'$ se taie după dreapta $A'A_1$. Punctul M' este deci la intersecţia dreptei $A'A_1$ cu planul $AB'C'$. Dacă notăm cu A_4 punctul unde SA_2 a tăiat pe $B'C'$, se vede uşor că M' este la intersecţia dreptelor AA_4, $A'A_1$ din planul SAA_2.

S'a dovedit astfel că punctul M aparţine planului SAA_2 şi la fel că aparţine şi planelor SBB_2, SCC_2. Rezultă că şi punctul M' *este pe dreapta* SI, astfel că *cele trei puncte* S, M, M' *sunt colineare.*

4. *Punctele* S, M', M, I *formează o diviziune armonică.*

Într'adevăr, dacă se consideră patrulaterul complet format de laturile SA, SA_2, MA, MA_2, se ştie că diagonala SM este impărţită armonic de diagonalele $A'A_1$, AA_2.

5. Se poate considera cazul când punctul S este la infinit, adică figură formată de trei drepte paralele Δ, Δ', Δ'' tăiate de două plane ABC, $A'B'C'$.

Fie A_1, B_1, C_1 punctele de întâlnire ale diagonalelor trapezelor $BB'C'C$, $CC'A'A$, $AA'B'B$.

Planele A_1AA', B_1BB', C_1CC' *se taie după o dreaptă paralelă cu* AA' şi care intersectează planele ABC şi $A'B'C'$ în punctele P şi P'.

Planele $A'BC$, $BC'A'$, $CA'B'$ *se întâlnesc într'un punct* M *situat pe dreapta* PP'.

Planele $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ *se întâlnesc într'un punct* M' *situat pe dreapta* PP'.

Punctele M *şi* M' *împart segmentul* PP' *în trei părţi egale.*

Demonstraţiile sunt identice cu cele arătate la punctele 1, 2, 3 şi 4.

NOTE MATEMATICE

1. — *Asupra problemei 1776.*

Rezolvată la pag. 122 din volumul XXII, această problemă cere un patrat de 5 cifre şi unul de 4 cifre, care să difere între ele prin 10.000. Enunţul conduce la rezolvarea în numere întregi a ecuaţii

$$x^2 - y^2 = 10^4. \tag{1}$$

Cazul general al acestei ecuaţii l-am studiat în articolul *„Patrate pseudogemene“*, publicat în *„Gazeta Matematică“*, Vol. XXXI, pag. 402.

Am numit patrate pseudogemene, patratele care au toate cifrele identice afară de una de rang n. Ecuaţia, care dă aceste patrate este

$$x^2 - y^2 = c\,10^n. \tag{2}$$

Pentru $c = 1$, $n = 4$ avem ecuaţia (1) ale cărei soluţii sunt

$$(\alpha)\begin{cases}(2^2.5^4 \pm 1)^2;\ (2^2.5^3 \pm 5)^2;\ (2^2.5^2 \pm 5^2)^2;\ (2.5^4 \pm 2)^2;\\ (2.5^3 \pm 2.5)^2;\ (5^4 \pm 2^2)^2;\ (5^3 \pm 2^2.5)^2,\end{cases}$$

la care se poate adăuga şi soluţia de forma

$$[(2^4.5^4)^2;\ 0^2].$$

Pentru cine nu are la îndemână Vol. XXXI din „*Gazeta Matematică*“, dăm următoarea soluţie ecuaţiei (1), diferită de soluţia dată problemei 1776 în Volumul XXII al „R. M T.“. Avem

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = d_1 \times d_2 = 10^4,$$

unde $d_1 > d_2$ sunt 2 divizori ai lui 10^4 aşa în cât

$$d_1 \times d_2 = 10^4;\quad x+y = d_1;\quad x-y = d_2.$$

Din ultimele două ecuaţii se scoate

$$(3)\qquad x = \frac{d_1+d_2}{2},\qquad y = \frac{d_1-d_2}{2}.$$

Deci pentru a avea pe x şi y se iau doi divizori de aceiaşi paritate ai lui 10^4, al căror produs este 10^4.

Căutarea divizorilor unui număr fiind o prea cunoscută problemă de aritmetică, nu mai inzistăm asupra ei.

G-L Gh. Buicliu

2. — **Eine Tripel-Lösung zu** $K_1, K_2, \ldots, K_9 \overset{n}{=} L_1, L_2, \ldots, L_9$ **für** $n = 2, 4, 6, 8, 10.$

(1) Es ist $5, 32, 41 \overset{n}{=} 16, 25, 43$ für $n = 2,4.$

(2) Gilt die Relation

$$a, b, c \overset{n}{=} d, e, f \quad \text{für} \quad n = 2, 4,$$

so gilt nach einem Satze von *Birck* auch die Identität

$$a+b+c,\ a+b-c,\ a-b+c,\ -a+b+c,\ 2d,\ 2e,\ 2f \overset{n}{=} d+e+f,\ d+e-f,\ d-e+f,\ -d+e+f,\ 2a,\ 2b,\ 2c$$

für $n = 1, 2, 4, 6, 8,$

Aus (1) folgt also

$$78, (-4), 14, 68, 32, 50, 86 \overset{n}{=} 84, (-2), 34, 52, 10, 64, 82 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 4, 6, 8,$$

also

$$39, (-2), 7, 34, 16, 25, 43 \overset{n}{=} 42, (-1), 17, 26, 5, 32, 41 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 4, 6, 8$$

bei Kürzung durch 2^n, also bei Ordnung der Zahlen nach Grösse (-2),

$$(-2)\ 7, 16, 25, 34, 39, 43 \overset{n}{=} (-1), 5, 17, 26, 32, 41, 42 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 4, 6, 8.$$

Daraus folgt nach der Theorie von den simultanen Identitäten

$$0, 4, 9, 18, 27, 36, 41, 45, 50, 59, 68, 77, 82, 86 \overset{9}{=} 1, 2, 11, 17, 26, 38, 42, 44, 48, 60, 69, 75, 84, 85.$$

(3) Gilt die Relation $p_1, p_2, \ldots, p_r \overset{k}{=} q_1, q_2, \ldots, q_r$ für die k ersten Potenzen, so gilt

$$p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1+h, q_2+h, \ldots, q_r+h \overset{k+1}{=} q_1, q_2, \ldots, q_r, p_1+h, p_2+h, \ldots, p_r+h.$$

Aus dem Endresultat unter (2) folgt also, wenn $h = 9$, die Relation

$$0, 4, \underline{9}, \underline{18}, \underline{27}, \underline{36}, 41, \underline{45}, \underline{50}, \underline{59}, \underline{68}, \underline{77}, 82, \underline{86}, 10, \underline{11}, 20, \underline{26}, 35, 47, 51, 53, 57, \underline{69}, 78, \underline{84}, 93, 94 \overset{10}{=}$$

$$1, 2, \underline{11}, 17, \underline{26}, 38, 42, 44, 48, 60, \underline{69}, 75, \underline{84}, 85, \underline{9}, 13, \underline{18}, \underline{27}, \underline{36}, \underline{45}, \underline{50}, 54, \underline{59}, \underline{68}, \underline{77}, \underline{86}, 91, 95,$$

also bei Streichung der unterstrichenen Zahlen und Ordnung der verbleibenden Zahlen nach Grösse

$$0, 4, 10, 20, 35, 41, 47, 51, 53, 57, 78, 82, 93, 94 \overset{10}{=} 1, 2, 13, 17, 38, 42, 44, 48, 54, 60, 75, 85, 91, 95.$$

(4) Aus dem Endresultat unter (3) folgt bei $h = 6$ die Relation

(α) $\quad 0, 4, 7, 8, 19, 20, 23, 35, 50, 51, 66, 78, 81, 82, 93, 94, 97, 101 \overset{11}{=}$

$\quad 1, 2, 6, 13, 16, 17, 26, 38, 42, 59, 63, 75, 84, 85, 88, 95, 99, 100.$

(β) $h = 31$ ergibt

$\quad 0, 4, 10, 20, 32, 33, 47, 53, 57, 69, 73, 79, 93, 94, 106, 116, 122, 126 \overset{11}{=}$

$\quad 1, 2, 13, 17, 31, 38, 42, 54, 60, 66, 72, 84, 88, 95, 109, 113, 124, 125.$

(γ) $h = 37$ ergibt

0, 4, 10, 20, 35, 39, 50, 51, 53, 79, 81, 82, 93, 97, 112, 122, 128, $132 \overset{11}{=}$
1, 2, 13, 17, 37, 42, 44, 48, 60, 72, 84, 88, 90, 95, 115, 119, 139, 131.

(5) Gilt die autokomplementäre Identität $A_1, A_2, \ldots, A_r \overset{2p+1}{=} B_1, B_2, \ldots, B_r$ für die $(2p+1)$ ersten Potenzen, so gilt auch

$$A_r - A_1,\ A_{r-1} - A_2,\ A_{r-2} - A_3, \ldots, A_{\frac{r}{2}+1} - A_{\frac{r}{2}} \overset{n}{=} B_r - B_1,\ B_{r-1} - B_2,\ B_{r-2} - B_3, \ldots, B_{\frac{r}{2}+1} - B_{\frac{r}{2}}$$

für $n = 2, 4, 6, \ldots, 2p$; es entstehen also Lösungen zu

$$C_1, C_2, \ldots, C_{\frac{r}{2}} \overset{n}{=} D_1, D_2, \ldots, D_{\frac{r}{2}} \text{ für } n = 2, 4, 6, \ldots, 2p.$$

Wir bekommen also aus der Relation 4α die Identität

(α) $101 - 0,\ 97 - 4,\ 94 - 7,\ 93 - 8,\ 82 - 19,\ 81 - 20,\ 78 - 23,\ 66 - 35,\ 51 - 50 \overset{n}{=}$
$100 - 1,\ 99 - 2,\ 95 - 6,\ 88 - 13,\ 85 - 16,\ 84 - 17,\ 75 - 26,\ 63 - 38,\ 59 - 42$

für $n = 2, 4, 6, 8, 10$, also

$101, 93, 87, 85, 63, 61, 55, 31, 1 \overset{n}{=} 99, 97, 89, 75, 69, 67, 49, 25, 17$ für $n = 2, 4, 6, 8, 10$.

Aus der Relation 4β bekommen wir nach gleicher Methode die Identität

$126, 118, 106, 86, 62, 60, 32, 20, 12 \overset{n}{=} 124, 122, 100, 92, 64, 50, 42, 18, 6$

für $n = 2, 4, 6, 8, 10$, nach Kürzung durch 2^n und Ordnung der Zahlen nach Grösse, also

$6, 10, 16, 30, 31, 43, 53, 59, 63 \overset{n}{=} 3, 9, 21, 25, 32, 46, 50, 61, 62$ für $n = 2, 4, 6, 8, 10$,

Schliesslich bekommen wir aus 4γ die Identität

(γ) $132, 124, 112, 92, 62, 54, 32, 30, 26 \overset{n}{=} 130, 128, 106, 98, 58, 48, 44, 36, 12$ für $n = 2, 4, 6, 8, 10$,

nach Kürzung durch 2^n und Ordnung der Zahlen nach Grösse, also

$13, 15, 16, 27, 31, 46, 56, 62, 66 \overset{n}{=} 6, 18, 22, 24, 29, 49, 53, 64, 65$ für $n = 2, 4, 6, 8, 10$,

(6) *Anmerkung:* In „The Tôhoku Math. Journal", Vol. 46, Part. 2, gab ich zu

$$\sum_{i=1}^{7} F_i^n = \sum_{i=1}^{7} G_i^n \text{ für } n = 2, 4, 6, 8, 10$$

gab ich die Lösung

$1, 28, 31, 32, 55, 61, 68 \overset{n}{=} 14, 20, 23, 44, 49, 64, 67$ für $n = 2, 4, 6, 8, 10$.

ALFRED MOESSNER
Ansbach (Germania-Bavaria)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, No. 6, Februarie 1943. *Spiru Haret*, de *V. Vâlcovici*. O analogie, de Prof. *D. Pompeiu* O generalizare a sumelor sinusurilor și cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică, de *Adrian I. Popescu*. Ecuații pseudo-reciproce, de *I. V. Mătieș*. *Concursul „Gazetei Matematice"*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Georges Calugareanu* et *Gh. Th. Gheorghiu*, Sur l'interprétation géométrique des invariants différentiels fondamentaux en géométrie affine et projective des courbes planes. (Extrait du Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences, T. 43, 1941).

3. *Const. Parvulescu.* Sur l'origine et la fin galactiques du système planétaire (Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, T. XXV, No. 1).

4 *Const. Parvulescu.* Sur les pulsations des systèmes stellaires. (Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, T. XXV, No. 1).

5. *Radu Bădescu.* Notă asupra unei integrale definite. (Extras din „R. M. T.", An. XXI, No. 9).

6. *Radu Bădescu.* O extindere a unor proprietăți caracteristice lănțișorului (Extras din revista „Pozitiva", An. II, No. 2).

7. *Radu Bădescu.* Asupra mișcării tautocrone plane. (Extras din „G. M.", An. XLVII, N-rile 7—8).

8. *Radu Badesco.* Sur une extension du mouvement tautochrone plan. (Bulletin de la Section Scientifique, Académie Roumaine, T. XXIV, No. 2).

9. *Radu Badesco.* Sur un procédé mixte pour résoudre les problèmes de *Cauchy* et de *Goursat* relatifs à l'équation des télégraphistes. (Extrait de L'Enseignement mathématique, année 1939—1940).

10. *Radu Badescu.* Sur l'équation fonctionnelle de Poinsot généralisé. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, Année 1939 - 1940).

11. *E. Arghiriade.* Un théorème de géométrie cinématique. (Buletinul Societăţii de Ştiinţe, 1931).

12. *E. Arghiriade.* Asupra coardelor unei curbe plane.

13. *E. Arghiriade.* Asupra transformării lui *Blaschke-Grunwald.*

14. *E. Arghiriade.* Asupra unei teoreme de geometrie infinitisimală.

15. *E. Arghiriade.* Asupra centrelor de curbură la conice.

16. *E. Arghiriade* et *Al. Niculescu.* Sur la conique de *Rivals.*

17. *E. Arghiriade.* Sur les surfaces gauches.

18. *E. Arghiriade.* Asupra unei quartice remarcabile a triunghiului. (Extras din „Pozitiva", 1941.)

19. *E. Arghiriade.* Sur le mouvement d'une figure plane semblablement variable (Mathesis, 1933).

20. *E. Arghiriade.* Sur les cônes quadratiques osculateurs d'une courbe gauche (Extrait du Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, T. XLII).

21. *Ionel I. Stamate.* Asupra unui sistem de ecuaţii. Identităţi algebrice. Extras din „Ştiinţă şi Progres", revista Liceelor Militare, 1943.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1927. — *Tangenta dusă în vârful* A *al unei elipse de centru* O *este tăiată în* N *de tangenta dusă în punctul oarecare* M. *Se cere locul geometric al punctului de întretăere al dreptelor* AM, ON *când punctul* M *descrie elipsa.*

CORNELIA NANES

Fie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

elipsa dată, raportată la axele ei, cu vârful $A(a,0)$ şi punctul variabil $M(\alpha,\beta)$. Ecuaţiile tangentelor în A şi M sunt respectiv

$$x-a=0 \qquad \text{şi} \qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0.$$

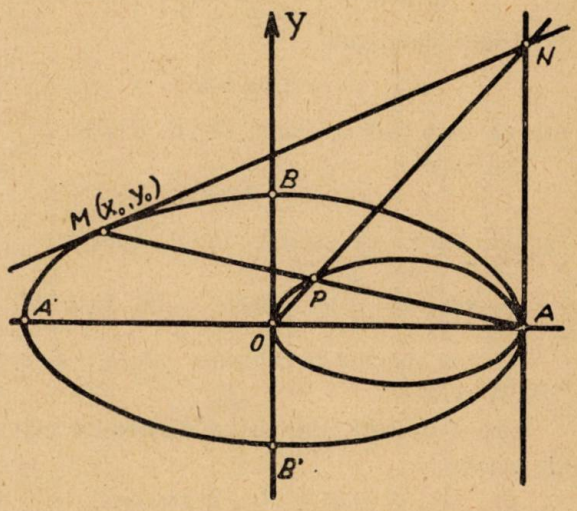
Punctul de intersecţie N ale acestor drepte are deci coordonatele

$$N\left[a,\ \frac{(a-\alpha)b^2}{a\beta}\right].$$

Se deduce că ecuaţiile dreptelor ON şi MA sunt respectiv

$$(ON) \qquad y=\frac{(a-\alpha)b^2}{a^2\beta}x,$$

$$(MA) \qquad y=\frac{x}{\alpha-a}(x-a).$$



Eliminând pe α, β între aceste ecuaţii şi ecuaţia (1) în care se înlocueşte x şi y prin α şi β, găsim că locul căutat este elipsa

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

Centrul acestei elipse este mijlocul lui OA, axa mare este $\frac{a}{2}$ şi axa mică $\frac{b}{2}$.

Au dat această soluţie D-şoara *Mang Ileana* (studentă, Timişoara) şi D-nii *Gligor N. I.* (Aliuş) şi *Luca I. I.* (Bacalaureat, Craiova).

Propunătoarea problemei a dat şi o frumoasă soluţie geometrică care ese din cadrul elementar al acestei reviste.

G-l Gh. B.

Problema 1998. — *Să se rezolve triunghiul, între elementele căruia se cunosc relaţiile:*

$$b=2h_a$$
$$2(h_b-h_a)=b-h_b$$
$$h_b+b=3h_a+1,$$

în care b, h_a, h_b, h_c *au semnificaţiile obişnuite.*

MIHAIL BOTEZ

Soluţie. Înlocuind b dat de prima relaţie, în celelalte două, obţinem

$$\begin{cases} 3\,h_b = 4\,h_a \\ h_b = h_a + 1, \end{cases}$$

iar de aci deducem imediat

(1) $\qquad h_a = 3, \quad h_b = 4, \quad$ apoi $\quad b = 6.$

Relaţia cunoscută

$$a\,h_a = b\,h_b,$$

ne dă încă ţinând seamă de (1), $a = 8$.

Din relaţia

$$h_a = b \sin C,$$

ţinând seamă de valorile din (1), găsim

$$\sin C = \frac{1}{2}, \qquad \text{deci} \qquad (2)\ C = 30^0.$$

Ne mai rămâne să calculăm latura c şi unghiurile A şi B.

Pentru aceasta, înlocuind elementele cunoscute în relaţia

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C,$$

avem

$$c^2 = 64 + 36 - 96\frac{\sqrt{3}}{2} = 16,96,$$

deci

$$c = 4,1.$$

Avem încă

$$\sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{4}{4,1},$$

deci

$$\log \sin A = \bar{1},98928$$

şi prin urmare

$$A = 77^0,19'.$$

Pentru calcularea lui B, avem

$$B = 180^0 - (30^0 + 77^0, 19') = 72^0, 41'.$$

Soluţii date de d-nii: *Dobrescu V. Eugen* (Lic. Piatra-Neamţ), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Lic. Beiuş), *Iosifescu Cicerone* (Lic. Piatra-Neamţ), *Mahrenkolz Johannes* (Cottbus), *Preda I. D-tru* (Lic. Slatina), *Sabău C.* (Lic. Beiuş), *Şipoş Eugen* (Polit., Timişoara), *Tarczenski Antoni* (student, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1999. — *Dacă* $a + b + c = 225^0$, *avem*

$$\sum \frac{\sin a - \cos a}{\sin (b - c) + \cos (b - c)} = \sqrt{2}.$$

IOAN N. GLIGOR

Soluţie. Relaţia de condiţie dată putându-se scri încă,

$$(2a - 90^0) + (2b - 90^0) + (2c - 90^0) = 180^0,$$

în virtutea unei relaţii cunoscute (Complément de Trigonométrie, p. 73), avem

$$\Sigma \sin (2a - 90^0) = 4 \prod \cos (a - 45^0),$$

sau

(1) $$\sum \frac{\sin (a - 45^0)}{\cos (b - 45^0) \cos (c - 45^0)} = 2.$$

Dar,

$$\sin (a - 45^0) = \frac{\sin a - \cos a}{\sqrt{2}},$$

$$\cos (b - 45^0) \cos (c - 45^0) = \frac{\cos (b + c - 90^0) + \cos (b - c)}{2}$$

$$= \frac{\sin (b + c) + \cos (b - c)}{2},$$

astfel că relaţie (1) devine

$$\sum \frac{\sin a - \cos a}{\sin (b + c) + \cos (b - c)} = \sqrt{2},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii bune date de d-nii: *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Militar, Timişoara), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Manolache C. Mircea* (Iaşi) şi *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara).

Problema 2005. — *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*:

$$\begin{cases} \Sigma x^2 (y + z) = 162 \\ x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3 = 2456 \\ x\,y\,z = 24 \end{cases}$$

ADRIAN I. POPESCU

Soluţie. Considerăm dezvoltarea

$$(x\,y + y\,z + z\,x)^3 = \Sigma x^3 y^3 + 3\,x\,y\,z\,\Sigma x^2 (y + z) + 6\,x^2 y^2 z^2$$

şi ţinând seamă de ecuaţiile date, avem

$$(x\,y + y\,z + z\,x)^3 = 2456 + 3 \times 24 \times 162 + 6 \times 24^2 = 17576.$$

De aci deducem

(1) $\qquad x\,y + y\,z + z\,x = 26,$

(1′) $\quad x\,y + y\,z + z\,x = 13(-1 \pm i\sqrt{3}), \quad (i = \sqrt{-1}).$

Observăm apoi că

(2) $\quad \Sigma x^2 (y + z) = x(x\,y + x\,z) + y(y\,z + y\,x) +$

$$z(x\,z + y\,z) = 162$$

şi cum din (1) deducem

$$x\,y + x\,z = 26 - y\,z, \quad y\,z + y\,x = 26 - x\,z,$$

$$x\,y + y\,z = 26 - x\,y,$$

rezultă că relaţia (2) devine

$$x(26 - yz) + y(26 - xz) + z(26 - xy) = 162,$$

sau,

$$26(x + y + z) - 3xyz = 162. \tag{3}$$

Cum $xyz = 24$, din (3) urmează

$$x + y + z = 9.$$

Considerăm acum sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ xy + yz + zx = 26 \\ xyz = 24. \end{cases} \tag{4}$$

Având cunoscute suma lui x, y, z, suma produsclor câte două şi produsul lor, rezultă că x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiei

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0,$$

care are rădăcinele 2, 3, 4.

Avem astfel pentru x, y, z următoarele soluţii, trecute în tabloul alăturat

x	2	2	3	3	4	4
y	3	4	2	4	2	3
z	4	3	4	2	3	2

Analog sistemului (4), obţinem alte două sisteme folosind ecuaţia (1′), dar acestea ne dau pentru x, y, z valori imaginare pe care nu le-am mai scris.

Soluţii date de d-ra *Popescu Maria* (Bucureşti) şi de d-nii: *Anton Ioan* (lic Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit, Timişoara), *Ionescu Petre* (Craiova), *Lupescu Corneliu* (S-Lt, Roman), *Preda I. D-tru* (lic Slatina), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Staicu C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

O soluţie nu a putut fi luată în consideraţie.

Problema 2007. — *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} \cos^2 x \left(\operatorname{cotg} y - \dfrac{\sqrt{3} - 4}{3} \right) = 1 \\ \sin^2 x (\operatorname{tg} y - \sqrt{3} + 4) = 1 \end{cases}$$

MIHAIL BOTEZ

Soluţie dată de autor. Sistemul propus se mai poate scri

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} y - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sqrt{3} - 4}{3} \\ \operatorname{tg} y - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sqrt{3} - 4, \end{cases}$$

sau încă,

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} y + 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{3} \\ \operatorname{tg} y + 1 - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sqrt{3} - 3 \end{cases} \tag{1}$$

Cum însă,

$$1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x, \quad 1 - \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x,$$

sistemul (1) devine

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} y - \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{3} \\ \operatorname{tg} y - \operatorname{cotg}^2 x = \sqrt{3} - 3. \end{cases}$$

Facem aci următoarea substituţie

$$\operatorname{tg} y = Y, \qquad \operatorname{tg} x = X \tag{2}$$

şi obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Y} - X^2 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{3} \\ Y - \dfrac{1}{X^2} = \sqrt{3} - 3, \end{cases} \tag{3}$$

sau

$$\begin{cases} 1 - X^2 Y = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{3} Y \\ Y X^2 - 1 = (\sqrt{3} - 3) X^2. \end{cases}$$

Adunând aceste ecuaţii, găsim cu uşurinţă

$$Y = 3\sqrt{3}\, X^2, \tag{4}$$

valoare, care înlocuită în ecuaţia 2-a din (3), ne dă

$$3\sqrt{3}\, X^2 - \frac{1}{X^2} = \sqrt{3} - 3,$$

sau

$$3\sqrt{3}\, X^4 - (\sqrt{3} - 3) X^2 - 1 = 0.$$

Rezolvind în raport cu X^2, avem

$$X_1^2 = \frac{1}{3}, \quad X_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ţinând seamă de substituţia (2) şi de relaţia (4), putem scri

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} y = \sqrt{3}.$$

De aci rezultă,

$$\begin{cases} x = k\pi + 30^0 \\ y = k_1\pi + 60^0. \end{cases}$$

Rădăcina $X_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, nu convine problemei.

Alte soluţii bune date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Lupescu Corneliu* (S-Lt, Roman), *Manolache Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Preda I. D-tru* (lic. Slatina) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2008. — *Să se arate că, triunghiul între elementele căruia avem relaţia*

$$\frac{a r_a}{p^2 - r_a^2} + \frac{b r_b}{p^2 - r_b^2} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{r_a + r_b}{p^2 - r_a r_b},$$

este isoscel.

FLORIAN I. GOGA

Soluţie. Fiindcă $r_a = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $r_b = p \operatorname{tg}\frac{B}{2}$,

relaţia din enunţ se mai poate scrie

$$\frac{a p \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{p^2\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)} + \frac{b p \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{p^2\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)} =$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)}{p^2\left(1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)},$$

sau

$$a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a+b) \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

Această relaţie se mai poate scrie

$$a\left(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right) = b\left(\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} - \operatorname{tg} B\right),$$

sau

$$\frac{a\left(\sin A \cos\frac{A+B}{2} - \cos A \sin\frac{A+B}{2}\right)}{\cos A \cos\frac{A+B}{2}} =$$

$$\frac{b\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos B - \cos\frac{A+B}{2}\sin B\right)}{\cos B \cos\frac{A+B}{2}},$$

de unde deducem,

$$(1) \qquad \frac{a \sin\frac{A-B}{2}}{\cos A} = \frac{b \sin\frac{A-B}{2}}{\cos B},$$

fiindcă, $\cos\frac{A+B}{2} \neq 0$.

Din (1) rezultă

$$\sin\frac{A-B}{2} = 0, \qquad \text{deci } A = B,$$

sau

$$2) \qquad \frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}.$$

Cum ştim că,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

împărţind această relaţie cu (2) ne dă

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B,$$

deci $A = B$, (A şi B fiind $< 180^0$).

Astfel, triunghiul între elementele căruia există relaţia din enunţ, este *isoscel.*

Soluţii bune date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit, Timişoara), *Enăchescu Ion* (lic. Milit, Timişoara), *Grozescu Liviu* (Lic. Beiuş), *Manolache C Mircea* (lic. Internat, Iaşi) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2013. — *Să se arate că dacă*

$$\frac{b z - c y}{a + x} = \frac{c x - a z}{b + y} = \frac{a y - b x}{c + z},$$

atunci avem şi

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Împărţind termenii fracţiilor date respectiv prin bc, ca, ab şi în urmă egalând aceste rapoarte cu raportul format efectuând suma numărătorilor şi numitorilor, avem

$$\frac{\frac{z}{c} - \frac{y}{b}}{\frac{a+x}{bc}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{\frac{b+y}{ca}} = \frac{\frac{y}{b} - \frac{x}{a}}{\frac{c+z}{ab}} = 0.$$

De aci deducem, observând că numitorii nu sunt toţi nuli,

$$\frac{z}{c} = \frac{y}{b}; \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}; \quad \frac{y}{b} = \frac{x}{a},$$

deci

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Manolache C. Mir-*

cea (lic. Internat, Iaşi), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Opran C. C-tin* (lic. Deva) şi *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara).

Problema 2014. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\prod_{2}^{5}(x+i)-\prod_{7}^{10}(x+j)=0.$$

MIHAIL BOTEZ

Soluţie. Scriind dezvoltat, avem

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-$$
$$(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)=0,$$

sau

$$(x^2+5x+6)(x^2+9x+20)-$$
$$(x^2+15x+56)(x^2+19x+90)=0.$$

Efectuând înmulţirile şi simplificând, găsim

$$x^3+18x^2+113x+246=0.$$

Încercând dacă primul membru nu se anulează pentru vre-un divizor a lui 246, găsim că $x=-6$ este o rădăcină a ecuaţiei (1).

Împărţind primul membru al ecuaţiei (1) prin $x+6$ şi egalând câtul cu zero, obţinem ecuaţia

$$x^2+12x+41=0,$$

care admite rădăcinile

$$x=-6\pm i\sqrt{5}, \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Ecuaţia dată are deci rădăcinele

$$-6, \qquad -6+i\sqrt{5}, \qquad -6-i\sqrt{5}.$$

Soluţii date de d-nii: *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Manolache C. Mircea* (lic. Internat, Iaşi) *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Opran C.* (lic. Deva) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2020. — *Se cer polinoamele* $P(x)$ *de gradul al 3-lea, care să satisfacă*

$$P'(x)\cdot\frac{P''(x)}{2!}\cdot\frac{P'''(x)}{3!}=P(x),$$

$P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$ *fiind derivatele succesive ale lui* $P(x)$.

EUGEN WEGENER

Soluţie. Fie,

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

atunci rezultă

$$P'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad \frac{P''(x)}{2!}=3ax+b, \quad \frac{P'''(x)}{3!}=a.$$

Înlocuind în relaţia din enunţ, avem

$$a(3ax+b)(3ax^2+2bx+c)\equiv ax^3+bx^2+ca+d,$$

sau

$$9a^3x^3+(3a^2b+6a^2b)x^2+(2ab^2+3a^2c)x+abc\equiv$$
$$ax^3+bx^2+cx+d.$$

Identificând coeficienţii aceloraşi puteri a lui x, din ambii membrii, deducem

$$\begin{cases} 9a^3=a, \\ 9a^2b=b, \\ 2ab^2+3a^2c=c, \\ abc=d, \end{cases} \qquad \text{deci } a=\pm\frac{1}{3}, \ (a=0, \text{nu convine}).$$

Înlocuind valoarea lui a găsită din prima relaţie, în cele următoare, avem

$$\begin{cases} b=b \\ \pm 2b^2+c=3c \\ bc=\pm 3d. \end{cases}$$

De aci se vede că b poate fi oarecare şi

$$c=\pm b^2, \quad d=\frac{b^3}{3}.$$

Polinoamele cerute sunt astfel de forma

$$P(x)=\pm\frac{x^3}{3}+bx^2\pm b^2x+\frac{b^3}{3}=\frac{(b\pm x)^3}{3},$$

unde b este arbitrar.

Soluţii date de d-ra *Popescu Maria* (Bucureşti) şi de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Barbu Virgil* (Polit Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Bordaşiu I Nicolae* (lic. Beiuş), *Burghiu D. Ioan* (Bucureşti), *Chiriac C.* (Lt), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Cristea D. Viorel* (Polit, Timişoara), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit, Timişoara), *Găţă Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Lucu I. Ioan* (Polit., Timişcara), *Luca L. Laurenţiu* (lic. Arad), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic Beiuş), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit, Timişoara şi Universitate), *Ştefănescu Marin* (Lt. Brăila), *Turicu T. Octavian* şi *Vasiliu A. B.* (lic. Chişinău).

Problema 2021. — *Să se arate că expresia*

$$(x-1)[(x-1)^{2(2n+1)}+3]-x^2$$

este divizibilă prin

$$x^3-4x^2+6x-4.$$

ION I. LUCA

Soluţie. Observăm întâi că,

$$x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2).$$

Este suficient să dovedim că expresia dată, notată cu E, este divizibilă prin $x-2$ şi prin (x^2-2x+2).

1°. În adevăr, pentru $x=2$, avem

$$E_{x=2}=(2-1)[2-1)^{2(2n+1)}+3]-4=1+3-4\equiv 0,$$

ceeace dovedeşte că E se divide prin $x-2$.

2°. Trebuie să mai dovedim că E este divizibil prin

$$x^2-2x+2=(x-1)^2+1.$$

Observând că mai putem scri

$$E=(x-1)[(x-1)^{2(2n+1)}+3]-(x-1)^2-2(x-1)-1$$

şi notând

$$x-1=t,$$

rămâne a dovedi că,

$$E=t(t^{2(2n+1)}+3)-t^2-2t-1$$

este divizibil prin t^2+1.

Dar pentru $t=i=\sqrt{-1}$, avem

$$E_{t=i}=i(i^{2(2n+1)}+3)-i^2-i-1$$

şi fiindcă $i^2=-1$, rezultă

$$E_{t=i}=i[(-1)^{2n+1}+3]+1-2i-1=$$
$$2i+1-2i-1\equiv 0.$$

Aceasta dovedeşte că polinomul E admite rădăcina imaginară $t=i$, dar el fiind cu coeficienţi reali, după o teoremă cunoscută, admite ca rădăcină şi pe conjugata sa, adică pe $t=-i$.

Astfel polinomul E se divide cu produsul

$$(t-i)(t+i)=t^2+1,$$

ceeace trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Burghiu D. Ioan* (lic. Titu Maiorescu, Bucureşti), *Chiriac C.* (Lt.) *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Patt I. Moise* (lic Beiuş), *Preda I. D-tru* (lic. Slatina), *Sasu I. Ioan* (lic. Beiuş), *Vasiliu A. B.* (lic. Chişinău) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2114. — Să se găsească un număr de cinci cifre, astfel ca numărul format de ultimele trei cifre să fie un multiplu al celui format de primele două, iar numărul căutat să fie produsul a doi factori, unul de două cifre şi altul de trei, al doilea obţinându-se din primul prin intercalarea unui zero între cifrele sale.

M. GHERMANESCU

2115. — Să se rezolve ecuaţia

$$x^4+2ax^3+4a^2x^2+2a^3x+a^4=0.$$

EUGEN WEGENER

2116. — Să se arate că funcţiunile

$$u=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{3}},\qquad v=\arcsin\frac{x-3}{2x}$$

diferă printr'o constantă, care se cere a se determina.

IOAN I. LUCA

2117. — Să se găsească centrul radical al cercurilor având ca diametre trei ceviene ale unui triunghiu.

I. LOZICIU-VARSET

2118. — Se dau punctele A, B diametral opuse pe o iperbolă H. Prin B se duc dreptele Bx, By paralele la asimptotele lui H, iar prin A se duce o dreaptă care întâlneşte Bx, By şi iperbola respectiv în C, D şi E. Să se demonstreze că E este mijlocul lui CD.

G-L GH. BUICLIU

2119. — Dacă, într'un tetraedru, perpendicularele comune la două perechi de muchi opuse sunt perpendiculare, atunci diedrele ce corespund celorlalte două muchi rămase, sunt drepte şi reciproc.

V THÉBAULT

2120. — Într'un triunghiu, în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţia

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=$$
$$\frac{r^2}{2p^2}(\sin A+\sin B+\sin C)^2.$$

EUGEN I. SIPOS

2121. — Într'un triunghiu ABC, în care mediana $AM=m$ formează

$$\sphericalangle BAM=45^\circ,$$

avem relaţia:

$$4c^2=a^2\cos 2B+4am\cos(45^\circ-B).$$

V. ALACI

Revista Matematică din Timișoara apare sub conducerea unei comitet compus din:

1. **Abramescu N.,** Doctor în matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
2. **Adam D. R.** Sublocotenent de geniu, Strada M. Cogălniceanu 31, Bucureşti.
3. **Adamescu M.,** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, Bucureşti.
4. **Alaci V.,** Doctor în Matematici, Profesor la Politehnică, Timişoara.
5. **Almăjan P.** Locotenent, Licenţiat în Matematici, Strada Zaharia 23, Bucureşti.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale ferată, înzestrarea căilor ferate, întinderea exploatării, la Politehnica, Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor la Electrotehnică la Politehnică, Rectorul Politehnicei din Timişoara.
8. **Angheluţă Th.,** Doctor în Matematici Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara. industrial, Timişoara.
9. **Ardelean Şt.,** Inginer, Director şi Profesor, Liceul Industrial, Timişoara.
10. **Arghiriade Em.,** Doctor în Matematici, Profesor secundar şi Conferenţiar de Matematici Generale la Politehnica din Timişoara.
11. **Baidaff B. I.,** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
12. **Bădescu Radu,** Doctor în Matematici, Profesor la Facultatea de Agronomie, Bucureşti.
13. **Bakony C.,** Inginer, Profesor de Tehnologie la Politehnica, Timişoara.
14. **Bănărescu M.,** Inginer, Inspector de Control C. F. R., Decan şi Profesor la Politehnica Timişoara, Strada Doja 51.
15. **Bărglăzan A.,** Doctor Inginer, Profesor la Maşini Hidraulice, dela Politehnica, Timişoara.
16. **Baron C.,** Şef de lucrări la catedra de Fizică dela Politehnică, Timişoara.
17. **Beneş Paul,** Profesor la Liceul Schwitz-Thierrin, Bucureşti.
18. **Blaşian V.,** Inginer de Mine, Profesor onorar la Politehnică, Timişoara.
19. **Bobârnac M.,** Inginer, Societatea Astra, Braşov.
20. **Bonea I.,** Subdirector şi Profesor la Topografie şi Geodezie, Politehnica, Timişoara.
21. **Botez M.,** Doctor în Matematici, Conferenţiar de Geometrie Descriptivă şi Stereotomie la Politehnica din Cernăuţi.

21a. **Botez M.,** Profesor la Şc. Normală şi lic. militar, str. Speranţei 12, Iaşi.

22. **Buicliu Gh.,** General de Artilerie, Fost 10 ani Profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politehnica din Timişoara. Insărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Politehnica din Bucureşti, Strada M. Cogălniceanu 10, Bucureşti II.
23. **Câlniceanu C.,** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Politehnică din Timişoara.
24. **Călugăreanu George,** Doctor în Matematici, Profesor de Teoria Funcţiilor la Universitatea din Cluj (Timişoara).
25. **Cândea C.,** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Politehnica din Timişoara.
26. **Catona V.,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Politehnică din Timişoara.
27. **Ciaudian Virgil,** Profesor la Liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
28. **Coca A.,** Licenţiat în Litere, Lector de Limba engleză la Politehnica din Timişoara.
29. **Coman A.,** Profesor Liceul „C. Diaconovici-Loga", Profesor onorific la Politehnică din Timişoara.
30. **ComănescuA.,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul din T.-Măgurele.
31. **Constantinescu G. G.,** Doctor în Matematici, Bucureşti.
32. **Constantinescu Gh.,** Profesor la Liceul Lazăr, Bucureşti.
33. **Centrea A.,** Doctor în Ştiinţe Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Politehnica din Timişoara.
34. **Costăchescu V. C.,** Căpitan de Marină, Constanţa.
35. **Cristescu I.,** Inginer, Profesor onorar la Politehnica din Timişoara.
36. **Cristodulo N.,** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Politehnica din Timişoara.
37. **Cserveny I.,** Inginer U. D. R., Reşiţa.
38. **Curea I.,** Doctor în Matematici. Conferenţiar de Matematici Generale şi Mecanică la Facultatea de Agronomie, Timişoara.
39. **Demetrescu Gh.,** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
40. **Diaconescu N.,** Profesor la Liceul din Slatina.
41. **Dobrozemsky M.,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Politehnica, Timişoara.
42. **Dumitriu-Dada,** Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
43. **Florescu M.,** Inginer Inspector Silvic, Strada A. Orescu 9, Bucureşti.
44. **Frătici I.,** Inginer Asistent la Politehnică, Timişoara.
45. **Georgescu D.,** Profesor la Lireul din Piteşti.
46. **Gheorghiu V.,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Hidraulica dela Politehnică din Timişoara.
47. **Gheorghiu Th. Gh.** Doctor în Matematici, Profesor de Geometrie Descriptivă la Politehnica din Timişoara.
48. **Ghermănescu M.,** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de Mecanică, Politehnica, Timişoara.
49. **Ghiţescu Spiridon,** Profesor secundar, Bucureşti.
50. **Hermann V.,** Licenţiat în Matematici, comuna Baia, Judeţul, Arad.
51. **Hristea H.,** Inginer-Inspector General la C. F. R.
52. **Gloden A.,** Doctor în Matematici, Profesor à l'Athénée, Rue Jean Jaurés 11, Luxemburg.
53. **Ionescu-Biss P. H.,** Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
54. **Ionescu Bujor C-tin,** Licenţiat în Matematici. Directorul Liceului din Buftea.
55. **Ionescu D. V.,** Doctor în Matematici, Profesor şi Decan la Universitatea din Cluj, provizor în Timişoara.
56. **Ionescu-Ţiu D. C.,** Locotenent, Licenţiat în Matematici, Calea Griviţei 158, Bucureşti.
57. **Ivănescu Cezar,** Profesor Liceul militar, Târgovişte.
58. **Kielburger M.,** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotehnică la Politehnică, Timişoara.
59. **Kühn I.,** Doctor în Chimie, Şef de lucrări pe lângă Catedra de Chimie Generală la Politehnica din Timişoara.

60. **Lascu Bal,** Licenţiat în Matematici, preparator la Facultatea de Ştiinţe din Cluj (Timişoara).
61. **Laţiu V.,** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie la Politehnică din Timişoara.
62. **Leonida D.,** Inginer, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
63. **Linteş I.,** Comandor Doctor Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.
64. **Liteanu Gh.,** General de Artilerie, Bucureşti.
65. **Lupan A.,** Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
66. **Macovschi Eug.,** Doctor în Chimie, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti.
67. **Manughevici C.,** Inginer-Chimist, şef de Lucrări la Politehnica din Timişoara.
68. **Mardan D.,** Inspector General, Profesor la Politehnică din Timişoara
69. **Mărculescu Origen,** Profesor la Colegiul „Carol I", Craiova.
70. **Marinescu I.,** Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
71. **Mateescu S.,** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor onorar, Timişoara.
72. **Mereuţă Emilian,** Licenţiat în Matematici, Strada Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.
73. **Mihăileanu N. N.,** Profesor secundar, Bucureşti.
74. **Mioc V.,** Licentiat în Matematici. Directorul Liceului Loga, Asistent pe lânga Catedra de Analiza Matematica la Politehnica din Timişoara.
75. **Murariu P.,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Militar „Mihai Viteazu", Timişoara.
76. **Murgulescu Elena,** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Politehnica din Timişoara.
77. **Murgulescu G. I.,** Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
78. **Musta Ştefan,** Profesor secundar, Strada Pavel 4, Beiuş.
79. **Nadaşan Şt.,** Doctor-Inginer, Profesor la Catedra de Rezistenţa Materialelor la Politehnica din Timişoara.
80. **Naneş Gh.,** Profesor pensionar, Bucureşti.
81. **Nicolau A.,** Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara
82. **Nicolau P.,** Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
83. **Ogrin N.,** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
84. **Onicescu O.,** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Strada Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
85. **Orăşeanu C.,** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
86. **Orăşeanu Gr.,** Profesor secundar, Bucureşti.
87. **Patriciu Valeriu,** Doctor, Profesor la Catedra de Geologie Economică şi Zăcămintele la Politehnica din Timişoara.
88. **Petrescu A.,** Profesor onorar, Bucureşti.
89. **Popescu E.,** Doctor în Chimie, Profesor la Politehnică, Bucureşti.
90. **Popescu I.,** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Politehnica din Timişoara.
91. **Popescu N. Corneliu,** Profesor, Călăraşi.
92. **Predoiescu I. M.,** Inginer la Societatea „Astra Română", Judeţul, Prahova.
93. **Protopopescu I.,** Inginer-Şef, Profesor la Politehnică din Timişoara.
94. **Purcariu I.,** Doctor în Fizică, Profesor la Academia Comercială din Bucureşti.
95. **Racliş N. R.,** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.
96. **Rădulet R.,** Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
97. **Roibănescu C.,** Profesor, Bucureşti.
98. **Sauciuc L.,** Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
99. **Savin C. Ion,** Licenţiat în Matematici, Strada Sărăriei 56, Iaşi.
100. **Schileriu I.,** Inginer, Bucureşti.
101. **Schram Elith,** Inginer, Timişoara.
102. **Scărlătescu D.,** Inginer, Profesor la Liceul industrial din Timişoara.
103. **Scorpan Al.,** Inginer, depoul C. F. R., Asistent la Politehnică, Timişoara.
104. **Sergescu P.,** Doctor în Matematici, Licenţiat în Fizolofie, Profesor la Universitatea din Cluj, 12 Strada Milano, Timişoara.
105. **Severineanu C.,** Inginer-Şef, Inspector General C. F. R., Profesor la Politehnica Timişoara.
106. **Simionescu D. Gh.,** Licenţiat în Matematici, Profesor secundar şi Inspector Şcolar, Bucureşti.
107. **Smighelschi O.,** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân-Martin.
108. **Stamatescu I.,** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
109. **Stambuleanu A.,** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Politehnică, Timişoara.
110. **Stamate I. Ionel,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.
111. **Stan A.,** Căpitan de Artilerie, Licenţiat Matematici, Bucureşti.
112. **Stăncescu C.,** Doctor-Inginer, Profesor onorar la Politehnica, Timişoara.
113. **Stantzel E.,** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Politehnică, Timişoara.
114. **Stoicescu L.,** Inginer, Profesor de Fizică Industrială la Politehnica din Timişoara.
115. **Stoicescu M.,** Profesor şi Director la Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.
116. **Teodorescu C.,** Inginer-Şef, Rectorul Politehnicei din Bucureşti.
117. **Teodosiu A.,** Doctor în Matematici, Profesor onorar, Timişoara.
118. **Ţino O.,** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometrie Analitică la Polithnica Timişoara.
118. **Vâlcovici V.,** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti. Strada Londra 44, Bucureşti.
120. **Viciu Aurel,** Profesor la Liceul Militar, Timişoara.
121. **Vişa Eugen,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul din Arad.
122. **Vlad I. V.,** Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
123. **Vlădescu I.,** Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
124. **Zăgănescu I.,** Inginer la C. F. R. şi Profesor la Politehnică, Timişoara.
125. **Zaharia N. O.,** Profesor, Constanţa.
126. **Zapan Gr.,** Comandor-Aviator, Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris), Şeful Serviciului Tehnic al Regiunii 3 Aeriene, Strada Pasteur 44, Bucureşti 6.
127. **Weber Matei,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Banaţia, Timişcara.

ANUL XXIII. APRILIE 1943 No. 2.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **Dr. ERICH H. STERN:** CARRÉS MAGIQUES AVEC CERTAINS NOMBRES DONNÉS A DES PLACES CHOISIES.

2. NOTE MATEMATICE 3, 4, 5

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1924, 2006, 2067, 2068, 2076, 2082, 2084, 2088.

5. PROBLEME PROPUSE: 2023, 2122–2129.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie, să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 – 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Cu plăcere anunțăm, că începând dela 15 Martie 1943 mai face parte dintre membrii „R. M. T." și D-l *I. V. Matieș,* profesor definitiv la liceul „*Sf. Vasile*", *Blaj,* un vechi și distins corespondent al „R. M. T."

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politehnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politehnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politehnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broșate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 2 TIMISOARA, APRILIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

CARRÉS MAGIQUES AVEC CERTAINS NOMBRES DONNÉS À DES PLACES CHOISIES

PAR LE

Dr. ERICH H. STERN
(AMSTERDAM).

I.

Dans le No 12 de Février 1942 (XXI, p. 145) de la *Revista Matematica din Timişoara,* le *Professeur Dr. A. Gloden (Luxembourg)* a publié sous le titre *Un patrat magic,* le carré magique reproduit ici, *fig. 1,* qui est composé avec les nombres de 0 à 63 et où figurent dans la moitié gauche de la première rangée les nombres 1, 9, 4, 2, qui désignent l'année 1942.

1	**9**	**4**	**2**	61	59	54	62
12	57	14	19	44	49	6	51
20	22	53	24	39	10	41	43
27	28	31	17	46	32	35	36
37	34	33	47	16	30	29	26
42	40	11	38	25	52	23	21
50	7	48	45	18	15	56	13
63	55	58	60	3	5	8	0

Fig. 1.

On sait qu'on appelle *carré magique d'ordre n,* un carré partagé en n^2 cases, occupées par n^2 nombres consécutifs, de façon que chaque rangée, colonne et diagonale donne la même somme. Cette somme constante, — appelée aussi *constante magique* ou *somme magique,* — se monte à $\frac{n(n^2+1)}{2}$ dans un carré composé avec les nombres de 1 à n^2 et à $\frac{n(n^2-1)}{2}$ dans un carré composé avec les nombres de 0 à n^2-1, soit dans le cas $n=8$, à 260 ou 252 respectivement.

Le carré susvisé appartient à un type spécial de carrés magiques, qui se signalent par les particularités suivantes:

1. Tous les couples de nombres, dont la somme est 63 (nombres complémentaires), sont symétriques par rapport à la médiane verticale;
2. tous les couples de nombres symétriques par rapport au centre du carré ont pour différence 1.

J'ai déjà étudié en détail ce type de carrés magiques dans une monographie intitulée *Nouvelle méthode pour construire et dénombrer certains carrés magiques d'ordre 4m avec application aux parcours magiques* [1], et j'ai démontré que, dans le cas $n=8$, le nombre de ces carrés s'élève à

10 221 813 825 011 712 000.

Les carrés, qui se déduisent les uns des autres, par rotation ou réflexion, sont considerés comme identiques et ne sont comptés qu'une fois dans ce total. Il est en outre démontré dans cette étude comment on peut varier systématiquement les „différences constantes".

II.

Dans ce qui suit, nous chercherons d'abord à déterminer le nombre total des carrés magiques de 8^2 cases possibles, qui remplissent non seulement les conditions 1 et 2, mais qui présentent aussi les nombres 1, 9, 4, 2, dans l'ordre indiqué, dans la moitié gauche de la première rangée.

[1]) Bruxelles, 1937; publiée aussi dans la revue *Sphinx,* VII (1937), pp. 123—140. Cf. également *Revista Matematica din Timişoara,* XIX (1939), p. 80. Sous le titre de *Stern squares of the 8-th order, J. C. McCoy* a republié l'essentiel de cette étude dans *Scripta Mathematica,* VIII (1941), pp. 49—52).

Pour cela, nous diviserons par 2 tous les termes du carré donné, en inscrivant les quotients dans les cases homologues d'un abaque U *(fig. 2)* et les restes dans celles d'un abaque V *(fig. 3)*.

0	**4**	**2**	**1**	30	29	27	31
6	28	7	9	22	24	3	25
10	11	26	12	19	5	20	21
13	14	15	8	23	16	17	18
18	17	16	23	8	15	14	13
21	20	5	19	12	26	11	10
25	3	24	22	9	7	28	6
31	27	29	30	1	2	4	0

Fig. 2.

1	**1**	**0**	**0**	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0

Fig. 3.

U contient chacun des nombres 0 — 31 deux fois; les nombres symétriques par rapport soit à la médiane verticale, soit à l'horizontale, sont complémentaires à 31.

V contient chacun des nombres 0 et 1 32 fois; les nombres symétriques par rapport à la médiane verticale sont complémentaires à 1; et les nombres symétriques par rapport à la médiane horizontale sont égaux.

Chaque rangée, colonne et diagonale donne dans U la somme 124, dans V la somme 4. On obtient des carrés magiques présentant les propriétés recherchées, en associant des abaques U et V appropriés par la formule $2U + V = Q$, c'est-à-dire en doublant les termes de U et en y ajoutant les termes des cases homologues de V, pour former le carré Q, dont chaque rangée, colonne et diagonale donne la somme $2 \times 124 + 4 = 252$ [2].

[2]) Pour les détails et les démonstrations, cf. la brochure signalée dans la note [1]), dont les résultats seront également utilisés dans ce qui suit.

Il est évident que tous les carrés magiques présentant les propriétés demandées se partagent, en divisant par 2 tous les termes, en deux abaques U et V, dont la moitié gauche de la première rangée est occupée comme dans l'exemple donnée.

Les 3 cases encore libres de la diagonale gauche du quartier supérieur gauche de U doivent être remplies par 3 nombres inférieurs à 32 et ayant pour somme $\frac{124}{2} = 62$. Ces nombres ne doivent comprendre aucun des quatre nombres déjà employés (0, 4, 2, 1), ni un de leurs compléments (31, 27, 29, 30), et de plus deux des trois nombres à choisir ne doivent pas être complémentaires.

Si nous désignons par a, b, c ces trois nombres, avec

$$a > b > c,$$

a peut prendre les valeurs 28, 26, 25, 24, 23, 22, et nous aurons les 30 combinaisons suivantes:

a	b	c	Nombre
28	de 26 à 18	de 8 à 16	9
26	„ 25 „ 19	„ 11 „ 17	7
25	„ 24 „ 19	„ 13 „ 18	6
24	„ 23 „ 20	„ 15 „ 18	4
23	„ 22 „ 20	„ 17 „ 19	3
22	21	19	1
		Total	30

Comme dans chacune de ces combinaisons a, b et c peuvent être répartis de $3! = 6$ façons sur les trois cases, la diagonale gauche du quartier supérieur gauche de U peut être occupée de $30 \times 3! = 180$ façons différentes.

Dans le quartier supérieur gauche de U, il y aura ainsi en tout 7 cases occupées, chacune par un des deux nombres appartenant à 7 des 16 couples complémentaires (0, 31; 1, 30; .. ; 15, 16). Il reste donc $16 - 7 = 9$ couples complémentaires disponibles, qui peuvent être répartis à volonté, c'est-à-dire de 9! manières différentes sur les cases encore libres de U. On peut choisir à volonté soit le plus petit, soit le plus grand des nombres de ces 9 couples, de sorte que le nombre des possibilités doit être multiplié par 2^9.

Il en résulte que le quartier supérieur gauche de U peut être construit de $30 \times 3! \times 9! \times 2^9$ façons différentes

Dans le quartier supérieur gauche de V, chaque colonne doit présenter deux zéros et deux unités. Comme l'occupation de la première rangée est fixée, chacune des quatre colonnes peut être complétée de 3 manières, indépendamment des trois autres colonnes; cela donne en tout 3^4 possibilités pour l'occupation du quartier supérieur gauche de V.

Le quartier supérieur gauche détermine l'occupation des 3 autres quartiers, aussi bien dans U que dans V.

Chacun des abaques U ainsi obtenus peut s'associer avec chacun des abaques V par la formule $2U + V = Q$, pour donner un carré magique Q remplissant toutes les conditions requises.

Le nombre de ces carrés magiques s'élève à

$$30 \times 3! \times 9! \times 2^9 \times 3^4 = 2{,}708.884.684.800.$$

III.

On voit que la méthode qui vient d'être exposée est extraordinairement féconde, et pourtant elle ne fournit que des carrés magiques d'un type très spécial; en outre, elle n'est applicable que si l'ordre n du carré est divisible par 4.

Les publications parues jusqu'à ce jour décrivent de très nombreuses et très différentes méthodes pour construire des carrés magiques Mais, en général, ces méthodes ne permettent de placer des nombres donnés dans des cases désignées d'avance, qu'en recourant à des tâtonnements longs et pénibles, ou bien en prenant pour n de très fortes valeurs, ou bien encore si les nombres donnés se trouvent, par hasard, être tels qu'ils puissent être mis en place par un procédé connu; et cela ne peut arriver qu'exceptionnellement, comme par exemple dans le célèbre carré magique de 4^2 cases de la *Melancolia* d'*Albrecht Dürer (fig. 4)*, où les deux

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

Fig. 4

nombres au milieu de la derrière rangée désignent le millésime de la planche gravée (1514).

Les carrés magiques, qui suivent, ont été construits sans tâtonnements par des méthodes, qui ne sont pas encore publiées sous cette forme [3]; ils sont composés avec les nombres de 1 à n^2 et présentent dans le coin supérieur gauche le millésime 1942.

21	20	35	**2**	17	16
32	31	**4**	33	6	5
7	**9**	15	22	28	30
1	3	18	19	34	36
26	25	10	27	12	11
24	23	29	8	14	13

Fig. 5.

La *fig.* 5 est un carré magique de 6^2 cases, à somme magique 111. Il présente la particularité que tous les couples, dont les termes sont complémentaires à 37, occupent des cases symétriques par rapport à la médiane verticale.

32	53	39	**2**	15	42	60	17
51	24	**4**	38	43	13	25	62
46	**9**	29	59	54	20	8	35
1	44	58	31	18	55	37	16
49	28	10	47	34	7	21	64
30	57	45	11	6	36	56	19
3	40	52	22	27	61	41	14
48	5	23	50	63	26	12	33

Fig. 6.

La *fig. 6* représente un carré magique de 8^2 cases, à somme magique 260. Il est en outre *symétrique*, c'est-à-dire que tous les couples donnant la somme 65 occupent des cases symétriques par rapport au centre du carré.

Si sur la fig. 6:

on laisse sans modification le quartier supérieur gauche;

[3]) Les principes, qui servent de bases à ces méthodes, ont été exposés dans mon *Résumé de contributions à une théorie générale mathématique des carrés magiques* (Bruxelles 1937), qui à paru sous le titre *Bericht über Studien zu einer allgemeinen mathematischen Theorie der magischen Quadrate* dans les *Comptes-Rendus du II-e Congrès international de Récréation mathématique* (Paris, 1937), pp. 88—94, ainsi que dans la revue *Sphinx*, VIII (1938), pp. 62 - 69.

on réfléchit le quartier supérieur droit par rapport à sa médiane verticale;

on réfléchit le quartier inférieur gauche par rapport à sa médiane horizontale;

on réfléchit le quartier inférieur droit successivement par rapport à sa médiane verticale et horizontale;

32	53	39	**2**	17	60	42	15
51	24	**4**	38	62	25	13	43
46	**9**	29	59	35	8	20	54
1	44	58	31	16	37	55	18
48	5	23	50	33	12	26	63
3	40	52	22	14	41	61	27
30	57	45	11	19	56	36	6
49	28	10	47	64	21	7	34

Fig. 7.

on obtient le carré magique *fig. 7*, qui n'est plus symétrique, mais *panmagique*, c'est-à-dire que les *diagonales brisées* donnent la somme magique 260. Une diagonale brisée se trace à partir d'une case quelconque, en progressant parallèlement à une diagonale principale et en convenant que le bord droit du carré peut se juxtaposer au bord gauche, de même que le bord supérieur à l'inférieur [4].

53	64	62	**2**	3	26	74	70	15
28	40	**4**	49	36	51	60	47	54
39	**9**	13	63	10	75	44	73	43
1	58	17	32	23	68	65	24	81
27	48	66	77	41	5	16	34	55
57	76	71	14	59	50	11	6	25
45	21	38	19	72	7	69	61	37
52	35	78	33	46	31	22	42	30
67	18	20	80	79	56	8	12	29

Fig. 8.

[4]) De telles diagonales brisées sont marquées sur la fig. 7, par exemple, par les nombres 53, 4, 59, 16, 12, 61, 6, 49, ou par 53, 51, 54, 55, 12, 14, 11 10, etc Par la transformation indiquée, tout carré magique symétrique d'ordre pair devient panmagique, mais la réciproque ne se vérifie pas généralement, comme on l'a prétendu à tort.

La *fig. 8* est un carré magique de 9^2 cases, à somme magique $369 (= 9 \times 41)$ et c'est en même temps un exemple de ce qu'on appelle un *carré bordé*. On y trouve à l'intérieur trois petits carrés concentriques de 7^2, 5^2 et 3^2 cases, qui peuvent chacun être considérés comme magiques, car chacune de leurs rangées, colonnes et diagonales donne une somme constante. Cette somme constante est respectivement $287 = 7 \times 41$, $205 = 5 \times 41$, et $123 = 3 \times 41$. En outre, tous les couples de termes, dont la somme est $82 = 2 \times 41$, sont placés symétriquement par rapport au centre ou à l'une des deux médianes.

Est-il possible de trouver une fonction de n déterminant le maximum de nombres et de cases, qu'on peut se donner d'avance pour la construction d'un carré magique de n^2 cases? C'est une question qui a encore besoin d'être étudiée. Au moins, on peut affirmer ce que suit: on peut toujours plaçer 4 nombres donnés dans 4 cases choisies dans un carré magique de 6^2 cases, si aucun de ces nombres n'est supérieur à 36 et si deux au plus des cases choisies se trouvent sur la même rangée, colonne ou diagonale.

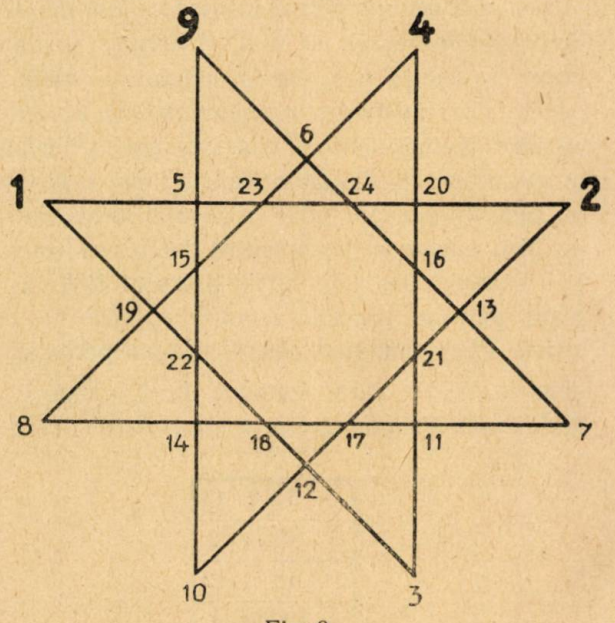


Fig. 9.

On peut procéder d'une manière analogue sur d'autres figures magiques, par exemple, sur des *Étoiles magiques*. La *fig. 9* est un exemple d'étoile

magique, faisant ressortir le millésime 1942. Cette figure se compose de 8 lignes droites, qui se coupent en 24 points. Les nombres de 1 à 24 sont répartis entre ces 24 points de façon que les 6 nombres, qui occupent une quelconque des 8 droites, donnent la somme magique 75; en outre, deux nombres symétriques par rapport au centre ont 6 pour différence constante.

Ces exemples peuvent se multiplier à volonté. Naturellement, les nombres à placer peuvent être ceux d'une ou de plusieurs dates choisies, telles que nouvel an, jour de fête, anniversaire, etc. [5]

IV.

Pour terminer, nous allons voir comment il y a lieu de procéder quand, parmi les nombres donnés, il s'en trouve deux ou plusieurs qui se répètent. Si l'on s'en tient à la stricte définition d'un carré magique, il n'est pas possible d'en construire un dans ces conditions, puisqu'elle exige que le carré soit composé de n^2 nombres *consécutifs* et par conséquent sans aucune répétition.

Dans de pareils cas, on devra exiger au moins que tous les nombres, autres que ceux qui sont donnés, soient différents entre eux et aussi des nombres donnés.

Si l'on admet des nombres choisis à volonté (et pas nécessairement consécutifs) et des sommes magiques facultatives, il est très facile de construire de tels carrés magiques; dans un carré de 4^2 cases, on peut en général sans grande peine placer 4 nombres donnés sur 4 cases choisies [6].

Sous cette forme le problème est si simple, qu'il devient trivial.

Mais si l'on s'impose pour somme magique $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ou éventuellement $\frac{n(n^2-1)}{2}$, et si l'on s'interdit l'emploi des nombres négatifs, en exigeant de plus que la suite des nombres utilisés ne soit interrompue qu'en un ou deux points, le problème devient alors intéressant.

Nous donnerons deux exemples de carrés magiques de 8^2 cases de ce genre, à somme magique 260.

5	11	21	**42**	43	24	54	60
10	59	**19**	48	45	18	6	55
61	**1**	28	38	40	26	3	63
1	29	13	51	49	50	36	31
65	35	52	14	16	15	30	33
4	64	39	25	27	37	62	2
56	8	47	20	17	46	57	9
58	53	41	22	23	44	12	7

Fig. 10.

La *fig. 10* fait ressortir la date 1.1.1942, où *un* des quatre nombres donnés est répété. Le carré est composé des nombres 1—31; 33; 35—65, de sorte que la suite utilisée n'est interrompue qu'en deux points.

7	20	45	**19**	48	26	38	57
9	50	**19**	21	42	1	63	55
56	**12**	49	44	23	64	2	10
12	24	43	60	6	25	37	53
54	41	22	5	59	40	28	11
29	62	3	31	33	14	52	36
35	4	61	34	32	51	13	30
58	47	18	46	17	39	27	8

Fig. 11.

La *fig. 11* fait ressortir la date 12.12.1919, où *deux* des quatre nombres donnés sont répétés Ce carré est composé des nombres 1—14; 17—64; la suite utilisée n'est interrompue qu'en un point

---

On sait que les anciens occultistes croyaient que les carrés magiques pouvaient porter bonheur et qu'ils les employaient comme talismans. S'ils avaient connu les méthodes modernes, ils les auraient sûrement utilisées pour donner à ces carrés un rapport personnel avec le porteur de l'amulette.

Le lecteur pourra essayer de construire des carrés magiques de diverses ordres, en y insérant la date de sa naissance.

Traduit de l'allemand par E. CAZALAS (Versailles).

---

[5]) J'ai publié à diverses reprises des figures de ce genre; cf. par exemple, *Sphinx* VII (1937), pp. 2,40; VIII (1938), pp. 1, 74, 120; IX (1939), pp. 65—66.

[6]) On trouve de nombreux exemples de carrés de ce genre dans l'ouvrage *M. B. Lehmann, Neue mathematische Spiele für die Jugend* (Wiesbaden, 1932), pp. 40—44, 47—49.

NOTE MATEMATICE

3. — *Asupra problemei 1605.*

În „R. M. T.", Februarie 1943, p. 146 s'a publicat soluția analitică a următoarei probleme propusă de d-l prof. *D. V. Ionescu*: *tangenta la o iperbolă într'un punct* M *al ei, întâlnește asimptotele în punctele* A *și* B, *iar normala în* M *întâlnește axele în* C *și* D. *Să se arate că punctele* A, B, C, D *sunt pe un cerc care are ca diametru pe* C D. *Să se arate că raportul dintre* A B *și* C D *este constant când* M *descrie iperbola. Dacă iperbola este echilateră, atunci figura* A B C D *este un pătrat.*

Voi arăta o soluție geometrică a acestei probleme. Fie O centrul iperbolei. Se știe că asimptotele unei iperbole determină pe o tangentă oarecare, două segmente egale M A = M B. Putem deci reduce problema propusă, la următoarea: Într'un triunghiu O A B perpendiculara pe A B în mijlocul ei întâlnește cele două bisectoare ale $\sphericalangle$ O, în C și D și se cere să se arate că punctele A, B, C, D sunt pe un cerc.

Mediatoarea laturii A B întâlnește cercul circumscris triunghiului O A B, în mijlocul arcului A B și tot prin acest punct trece și bisectoarea interioară a unghiului O; deci punctul D se găsește pe cercul circumscris lui A O B.

Fie apoi C_1 punctul în care M D taie cercul circumscris; cum M D este un diametru al acestui cerc, urmează că $\sphericalangle$ D O C_1 este drept și deci C_1 se confundă cu C; am arătat deci că cele patru puncte A, B, M, N sunt conciclice.

Raportul dintre A B și C D este raportul dintre o latură și diametru, iar după „teorema sinusului" avem A B : C D = sin B O A. Când M descrie iperbola, acest raport rămâne constant, căci nu depinde decât de unghiul asimptotelor. Dacă iperbola este echilateră, avem sin B O A = 1 și deci A B = C D.

E. ARGHIRIADE

4. — *Formarea ecuației, ale cărei rădăcini, sunt valorile raportului anarmonic, ale rădăcinilor unei ecuații de gradul al patrulea.*

În articolul cu titlul de mai sus, din pag. 2, vol. XXIII, al acestei reviste, domnul Profesor *Th. Angheluță*, dă o frumoasă soluție acestei probleme.

În cele de mai jos, îmi propun să arăt un interesant exercițiu de eliminare, pentru formarea acestei ecuații.

Păstrând aceleași notații din articolul citat, avem

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4 \\ y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3 \\ A = \dfrac{x_1 x_2 + x_3 x_4 - (x_1 x_3 + x_2 x_4)}{x_1 x_2 + x_3 x_4 - (x_1 x_4 + x_2 x_3)}. \end{cases}$$

Din primele trei, ținând seama de relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației date,

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

avem:

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = b \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = a c - 4 d \\ y_1 y_2 y_3 = d(a^2 - 4 b) + c^2 \\ A = \dfrac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}. \end{cases}$$

Eliminând între aceste relațiuni pe y_1, y_2, y_3, obținem ecuația la care satisface A.

Pentru a ușura eliminarea, să transformăm ecuația

$$y^3 - b y^2 + (a c - 4 d) y \quad d\,4b - a^2) - c^2 = 0$$

— care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 — cu substituția

$$y = v + \frac{b}{3}$$

și primim ecuația

$$(3)\qquad v^3 + \alpha v + \beta = 0,$$

unde

$$\alpha = P'\left(\frac{b}{3}\right), \qquad \beta = P\left(\frac{b}{3}\right).$$

Cu această substituție relațiile (2) devin,

$$(4)\quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 = \alpha \\ v_1 v_2 v_3 = -\beta \\ A = \dfrac{v_1 - v_2}{v_1 - v_3}. \end{cases}$$

v_1, v_2, v_3, evident rădăcinile ecuației (3).

De aici rezultă că pentru a elimina pe y_1, y_2 şi y_3 din ecuaţiile (2), este acelaşi lucru cu eliminarea lui ν_1, ν_2, ν_3 din ecuaţiile (4).

Din prima, avem

$$\nu_3 = -(\nu_1 + \nu_2)$$

şi care valoare înlocuită în celelalte, ne dă

$$(5) \qquad -\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_1\nu_2 = \alpha,$$

$$(6) \qquad \nu_1^2\nu_2 + \nu_1\nu^2 = \beta,$$

$$(7) \qquad (2A-1)\nu_1 = -\nu_2(A+1).$$

Relaţiunea (7) o scriem,

$$\frac{\nu_1}{A+1} = \frac{-\nu_2}{2A-1} = \lambda$$

şi de unde

$$\nu_1 = \lambda(A+1), \quad \nu_2 = -\lambda(2A-1), \quad \nu_3 = -\lambda(A-2).$$

Înlocuind apoi aceste valori în (5) şi (6), primim

$$(8) \qquad \begin{cases} -3\lambda^2(A^2 - A + 1) = \alpha \\ \lambda^3(A+1)(2A-1)(A-2) = \beta, \end{cases}$$

iar prin împărţire,

$$\lambda = -\frac{3\beta(A^2 - A + 1)}{\alpha(A+1)(2A-1)(A-2)},$$

care valoare înlocuită într'una din ecuaţiile (8), ne dă ecuaţia căutată,

$$27\beta^2(A^2 - A + 1)^3 + \alpha^3(A+1)^2(2A-1)^2(A-2)^2 = 0.$$

ST. MUSTA

---

5. — *Asupra unei probleme a d-lui D. Pompeiu.*

D-l prof. *N. Abramescu* [1] a dat o soluţie elementară următoarei probleme comunicată de d-l *D. Pompeiu:*

„Dacă se consideră trei pătrate lipite OA_1B_1C, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_2B_3B_2$ *unghiurile* B_1OB_2, B_3OA_3 *sunt egale."*

Imi propun, în cele ce urmează, să găsesc o relaţie ce leagă unghiul B_1OB_2 de B_3OA_3 când înlocuesc patratele prin romburi.

Fie φ unghiul COB_1. Dacă pun

$$\alpha = B_1OB_2 \quad \text{şi} \quad \beta = B_3OA_3,$$

am:

[1]) *N. Abramescu.* Asupra unei probleme a d-lui *D. Pompeiu* R. M. T., vol. XXII, p. 118.

$$(1) \qquad \boxed{3\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\varphi - \beta)}.$$

Iată cum ajung la această relaţie.

Construim rombul B_1B_2EF egal cu $A_1A_2B_2B_1$ aşezat deasupra, cu centrul în D.

Fie $DE = a$, $DF = b$.

Din triunghiurile dreptunghice: DEF, ODB_2 şi OEB_3, am

$$(2)\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad (3)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{3a}, \quad (4)\ \operatorname{tg}(\varphi - \beta) = \frac{b}{2a},$$

cari la un loc dau

$$3\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\varphi - \beta).$$

Observaţie. Dacă în această relaţie fac

$$\operatorname{tg}\varphi = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3},$$ [2])

relaţia (1) este verificată.

EUGEN V. DOBRESCU

[2]) *V. Alaci.* O soluţie trigonometrică, vol. XXII, p. 133

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLVIII, No. 7, Martie 1943. † *N. V. Teodorescu,* de G-l *Gh. Buicliu. Isac Newton,* de *Edm. Halley.* Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu.* O transformare geometrică, de *A. Myller.* Raportul comisiunii pentru premiul de Aritmetică, de G-l *Gh. Buicliu, I. Ionescu* şi C-dor *I. Linteş.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. Dipl. Ing. Dr. techn. *Alois Koch.* Die Lösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Reihen.

3. Ing. Şef. *C. Bakonyi.* Lucrări cu diferite sisteme de aparate divizionare

4. Cpt. *C. V. Costăchescu.* Câteva contribuţii la problema lansării. (Extras din „R. M. T.", Vol. XXII, p. 127 şi 140).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1924. — *Să se rezolve sistemul*

$$\sqrt{3\Sigma x^{-1} - 2} = \sqrt{\Sigma(xy)^{-1} - 1} = \sqrt{\Sigma(xyz)^{-1} + 1} = 5.$$

I. N. GLIGOR

Din enunţ se deduce

$$\Sigma x^{-1} = 9, \quad \Sigma(xy)^{-1} = 26, \quad \Sigma(xyz)^{-1} = 24,$$

de unde rezultă că x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} sunt rădăcinele ecuaţiei

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0.$$

Încercând factorii lui 24, se găseşte că rădăcinile acestei ecuaţii sunt

$$t_1 = 2, \qquad t_2 = 3, \qquad t_4 = 4.$$

Deci

$$x^{-1} = 2, \qquad y^{-1} = 3, \qquad z^{-1} = 4,$$

de unde

$$x = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{1}{3}, \qquad z = \frac{1}{4},$$

rădăcini care verifică sistemul din enunţ

Soluţii analoage foarte bune s-au primit de la d-nii: *Cristea D. Viorel* (Bacalaureat, Arad); *Ionescu F. P.* (Colegiul Naţional, Craiova), *Luca I. I* (Bacalaureat, Arad), *Mahrenholz J.* (Cottbus), *Vasiliu Gh. D.* (lic. Militar, Timişoara).

Problema 2006. — *Se dau axele rectangulare* $x x'$, $y y'$ *cu origina în* O. *Pe* $O y$ *se ia segmentul constant* $OA = 2p$ *şi din* A *se duce o dreaptă variabilă care întâlneşte axa* $x x'$ *în* B. *Din* O *se duce o perpendiculară pe* AB *care întâlneşte perpendiculara dusă în* B *pe axa* $x x'$, *în* P.

1°. *Se cere locul geometric al punctului* P

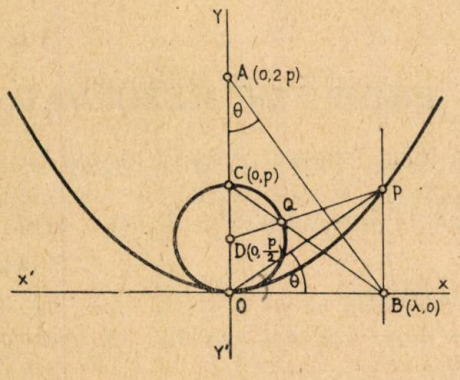
2°. *Ducându-se mediana* BC *a triunghiului* OAB *care întâlneşte în* Q *dreapta* DP *(*D *fiind mijlocul lui* OC*), se cere locul geometric al punctului* Q.

V. ALACI

Construim figura în condiţiile problemei şi punctele A, B, C, D raportate la axele $x x'$, $y y'$ au următoarele coordonate,

$$A(0, 2p), \quad B(\lambda, 0), \quad C(0, p), \quad D(0, \frac{p}{2}),$$

unde p este dat, iar λ variabil.



Fie (x, y) coordonatele punctului P şi $\sphericalangle OAB = \sphericalangle BOP = \theta$, având laturile perpendiculare.

1°. *Locul lui P.* Din triunghiurile dreptunghice OAB şi BOP, avem

$$OB = OA \operatorname{tg}\theta, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{BP}{OB},$$

sau

$$x = 2p \operatorname{tg}\theta, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Eliminând $\operatorname{tg}\theta$, găsim

$$(1) \qquad x^2 = 2py,$$

care este locul geometric al punctului P. Se vede că, *acest loc este o parabolă, având axa* Oy *şi focarul,* $D(0, \frac{p}{2})$.

Locul lui Q. Punctul P fiind situat pe parabola (1), are coordonatele

$$P(\lambda, \frac{\lambda^2}{2p}).$$

Punctul Q este intersecţia dreptelor DP şi BC, de ecuaţii:

$$(DP) \qquad y - \frac{p}{2} = \frac{\frac{\lambda^2}{2p} - \frac{p}{2}}{\lambda} x,$$

$$(BC) \qquad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{p} = 1.$$

Prima ecuaţie se mai poate scri

$$2y - p = \frac{\lambda^2 - p^2}{p\lambda} x$$

şi înlocuind aci $\lambda = \frac{px}{p - y}$ scoasă din ecuaţia dreptei (BC), obţinem

$$2y - p = \frac{\frac{p^2 x^2}{(p-y)^2} - p^2}{\frac{p^2 x}{p - y}} x = \frac{x^2 - (p-y)^2}{p - y},$$

sau

$$(2y - p)(p - y) = x^2 - p^2 + 2py - y^2.$$

Efectuând calculele şi reducerile, obţinem

$$x^2 + y^2 - py = 0.$$

Locul lui Q este astfel un cerc cu centrul în $D(0, \frac{p}{2})$, tangent în origine la axa $x' x$.

Soluţii date de d-nii: *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Cristea D. Viorel* (Polit., Timişoara), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Luca L. Laurenţiu* (lic. Arad), *Manolache C. Mircea*

(lic. Internat. Iaşi), *Mihăilescu C*, *Opran C.*, *Preda I. D-tru* (lic. Slatina), *Sabău C.* (lic. Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Tarczewski Antoni* (Polit., Timişoara), *Turicu T. Octavian* (lic Arad) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2028. — *Să se găsească rădăcinele reale ale ecuaţiei*

$$x^3+(i-10)x^2+(31-5i)x+6i-30=0,\quad (i=\sqrt{-1})$$

MIHAIL ST. BOTEZ

Soluţie. Această ecuaţie putându-se scri

$$x^3-10x^2+31x-30+i(x^2-5x+6)=0,$$

a o rezolvi în condiţiile problemei, înseamnă a găsi rădăcinele comune ecuaţiilor

$$(1)\qquad \begin{cases} x^3-10x^2+31x-30=0 \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$$

Ecuaţia 2-a având rădăcinile reale 2 şi 3, iar acestea verificând şi prima ecuaţie din (1), rezultă că rădăcinele reale ale ecuaţiei date sunt 2 şi 3.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beius), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Creţa F. Gavril* (Polit, Timişoara), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Lt.), *Enăchescu Gr. Ion* (lic Milit, Timişoara), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Iacob St. Eugen* (Cpt), *Ieremia I. Aurel* (Polit., Timişoara), *Ieşan Şt. Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Knsky Ioan* (Timişoara), *Luca I Ioan* (Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt, Roman), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus). *Muţiu Antim* (lic Beiuş), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit., Timişoara), *Popescu Adrian* (Lt.), *Preda I. D-tru* (lic. Slatina), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Stefănescu Marin* (Lt., Brăila), *Vasiliu A. B.* (lic. Chişinău) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti)

Problema 2067. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} \sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}\pm\sqrt{2y+\sqrt{4y-1}}=5\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{x-0{,}25}+\sqrt[4]{y-0{,}25}=2\sqrt{2}. \end{cases}$$

ADRIAN I. POPESCU

Soluţie. Ştim că o expresie de forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, se descompune într'o sumă de doi radicali simpli, dacă A^2-B este un patrat perfect, în care caz avem

$$(1)\qquad \sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

unde

$$(2)\qquad A^2-B=C^2.$$

Fiindcă condiţia (2) este satisfăcută pentru cei doi radicali suprapuşi din prima ecuaţie, de oarece

$$(2x)^2-(4x-1)=(2x-1)^2,$$

$$(2y)^2-(4y-1)=(2y-1)^2,$$

rezultă că prima ecuaţie, conform relaţiei (1) se poate scri

$$(3)\qquad \sqrt{4x-1}+1\pm\sqrt{4y-1}\pm 1=10,$$

iar ecuaţia (2) din enunţ multiplicată cu $\sqrt{2}$ devine

$$(4)\qquad \sqrt[4]{4x-1}+\sqrt[4]{4y-1}=4.$$

Notând,

$$(5)\qquad \sqrt[4]{4x-1}=t,\quad \sqrt[4]{4y-1}=z,$$

sistemul dat (deci ecuaţiile (3) şi (4), se descompune astfel

$$\begin{cases} t^2+z^2=8 \\ t+z=4, \end{cases}\quad \text{sau}\quad \begin{cases} t^2-z^2=10 \\ t+z=4. \end{cases}$$

Primul din aceste sisteme rezolvat ne dă

$$t=z=2,$$

iar al 2-lea:

$$t=\frac{13}{4},\qquad z=\frac{3}{4}.$$

Înlocuind aceste valori în (5) şi scoţând valorile lui x şi y, găsim

$$(6)\quad \begin{cases} x=\dfrac{t^4+1}{4}=\dfrac{17}{4} \\ y=\dfrac{z^4+1}{4}=\dfrac{17}{4} \end{cases}\quad \text{sau}\quad (7)\quad \begin{cases} x=\dfrac{28817}{1024} \\ y=\dfrac{337}{1024}, \end{cases}$$

valori care verifică ecuaţiile sistemului.

Sistemul dat, admite astfel sistemul de soluţii (6), dacă luăm în prima ecuaţie semnul +, acolo unde avem $\pm$ şi admite sistemul de soluţii (7) dacă luăm în prima ecuaţie semnul —, acolo unde avem $\pm$.

Soluţii bune date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Chiriac C.* (Lt), *Grozescu Liviu* (lic, Beiuş), *Manolache C. Mircea*, *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Popescu A.* (Lt). *Ţigănoiu Alexandru* (Brăila) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti),

Observare. S-au primit şi soluţii greşite pe care nu le menţionăm.

Problema 2068. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} \Sigma x^2 y^2 - \Sigma x^2 = 15 \\ x y z = 4 \\ (x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1) = 126. \end{cases}$$

EUGEN I. SIPOS

Soluție. Identitatea

$$(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1) = x^2 y^2 z^2 - (\Sigma x^2 y^2 - \Sigma x^2) - 1,$$

în virtutea primelor două ecuații, ne dă

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) = 0.$$

De aci deducem

$$x = \pm 1.$$

Dar $x = 1$, nu este compatibilă cu ecuația 3-a.

Pentru $x = -1$, ultimele două ecuații a sistemului dat, devin

$$(1) \quad \begin{cases} y z = -4 \\ y^3 z^3 - y^2 - z^3 + 1 = 63. \end{cases}$$

Ținând seamă de prima ecuație, acest sistem se mai poate scri

$$\begin{cases} y^3 z^3 = -64 \\ y^3 + z^3 = 0. \end{cases}$$

Înlocuind în prima ecuație pe z^3 prin $-y^3$, scoasă din ecuația 2-a și având în vedere și prima ecuație din (1), găsim

$$\begin{cases} y_k = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right) \\ z_k = -\frac{4}{y_k} = -2\left(\cos\frac{k\pi}{3} - i\sin\frac{k\pi}{3}\right), \end{cases}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5), \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Sistemul dat admite astfel sistemele de soluții.

x	-1	-1	-1	-1	-1	-1
y	2	$1+i\sqrt{3}$	$-1+i\sqrt{3}$	-2	$1-i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$
z	-2	$-1+i\sqrt{3}$	$1+i\sqrt{3}$	2	$-1-i\sqrt{3}$	$1-i\sqrt{3}$

precum și acelea ce se obțin permutând între ei pe x, y, z în toate modurile, ecuațiile sistemului fiind simetrice în raport cu x, y, z.

A dat toate soluțiile d-l *Popescu I. Adrian* (Polit, Timișoara).

Au găsit numai soluțiile reale, d-nii: *Bitang Alexandru* (Polit, Timișoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Mahrenholzo Jhannes* (Cottbus), *Muțiu Antim* (lic. Beiuș), *Pălăceanu Vasile* (lic Milit, Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2076. — *Să se determine un polinom* $P(x)$ *de gradul al 2-lea, astfel ca*

$$P(a) = a(b + c), \quad P(b) = b(a+c), \quad P(c) = c(a+b).$$

În acest caz, pentru care valoare a lui α, *ecuația*

$$P(x) + \alpha = 0,$$

admite o rădăcină dublă.

EUGEN I. SIPOS

Soluție. Luăm pentru $P(x)$ polinomul de gradul al 2-lea

$$(1) \quad P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)(x - b),$$

unde coeficienții A, B, C trebuesc determinați prin condițiile din enunț. Înlocuim deci x din (1), pe rând prin a, b, c și conform enunțului trebuie să avem

$$(2) \quad P(a) = A = a(b + c),$$

$$(3) \quad P(b) = A + B(b - a) = b(a + c),$$

$$(4) \quad P(c) = A + B(c-a) + C(c-a)(c-b) = c(a+b).$$

Relația (1) ne dă valoarea lui A. Scăzând (2) din (3), obținem

$$B(b - a) = b(a + c) - a(b + c) = c(b - a),$$

deci,

$$B = c.$$

Înlocuind în (4) valorile găsite pentru A și B, avem

$$a(b + c) + c(c - a) + C(c - a)(c - b) = c(a + b),$$

sau

$$a b + c^2 + C(c - a)(c - b) = a c + b c,$$

de unde

$$C = \frac{c(a - c) - b(a - c)}{(c - a)(c - b)} = \frac{(a - c)(c - b)}{(c - a)(c - b)} = -1.$$

Înlocuind acum valorile găsite pentru A, B, C în (1), găsim:

$$P(x) = a(b + c) + c(x - a) - (x - a)(x - b),$$

deci

$$P(x) \equiv -x^2 + (a+b+c)x.$$

Acesta este polinomul cerut $P(x)$.

Trecem acum la a 2-a parte a problemei.

Ecuaţia, $P(x) + a = 0$, în cazul nostru devine

$$-x^2 + (a+b+c)x + a = 0$$

Pentru ca această ecuaţie să aibă o rădăcina dublă, trebuie ca realizantul ei să fie nul, adică trebuie să avem

$$(a+b+c)^2 + 4a = 0.$$

De aci deducem

$$a = -\frac{(a+b+c)^2}{4}.$$

Alte soluţii mai lungi, date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit, Timişoara) *Chiriac C.* (Lt.), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Ioan* (lic. Milit, Timişoara), *Ieşan Şt. Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit, Timişoara), *Iosifescu Cicerone* (lic. Piatra Neamţ), *Luca I. Ioan* (Polit, Timişoara), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Sasu I. Ion* (lic. Beiuş) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti)

Problema 2082. — *Să se găsească un patrat perfect de forma* $abccda$ *unde* c *şi* da *sunt patrate perfecte, iar* $ba = da + 10$.

ELENA D PAPADOPOL

Soluţie. Din enunţul problemei reiese,

$c = 1, 4, 9, \qquad da = 16, 25, 36, 49, 64, 81$

şi respectiv $ba = 26, 35, 46, 59, 74, 91$, conform relaţiei $ba = da + 10$.

Patratul cerut se găseşte astfel printre numerile

621116	624416	629916
531125	534425	539925
641136	644436	649936
951149	954449	959949
471164	474464	479964
191181	194481	199981

Numerile 641136, 191181, 644436, 629916, 539925 şi 479964 fiind divizibile prin 3 fără a fi şi cu 9, nu pot fi patrate perfecte.

Dintre numerile rămase numai 194481 este patrat perfect

$$194481 = 441^2$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Bordaşiu I. Nicolae* (lic. Beiuş), *Chiriac C.* (Lt.), *Gâf G. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Georgescu N.*, (Polit., Timişoara). *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Ieşan St. Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş). *Olteanu Gr. Ioan* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Pălăceanu Vasile* (lic. Milit., Timişoara), *Petrovici Adalbert*, *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (lic. Milit, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2084. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}}{3\sqrt{x} - x\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{x} - x\sqrt{3}}{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}} = \sqrt{50x}.$$

IOAN N. GLIGC

Soluţie. Aducând la numitor comun fracţiile primul membru, avem

$$\frac{(3\sqrt{x} + x\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{x} - x\sqrt{3})^2}{9x - 3x^2} = \sqrt{50x},$$

sau

$$\frac{6x(3+x)}{3x(3-x)} = \sqrt{50x}.$$

Simplificând prin $3x$, în urmă ridicând la patrat şi aducând la formă întreagă, obţinem

$$4(9 + 6x + x^2) = (9 - 6x + x^2)50x,$$

sau simplificând prin 2, mai putem scri

$$(1) \qquad 25x^3 - 152x^2 + 213x - 18 = 0.$$

Cum pentru $x = 2$ primul membru se anulează, el se divide prin $x - 2$ şi ecuaţia (1) devine

$$(x-2)(25x^2 - 102x + 9) = 0.$$

De aci deducem rădăcinile:

$$x_1 = 2 \qquad \text{şi} \qquad x_{2,3} = \frac{51 \pm 6\sqrt{66}}{25}.$$

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Ioan* (lic. Milit., Timişoara), *Georgescu N.* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Knopf Adalbert* (lic Banaţia, Timişoara), *Knopf Hermann* (lic. Banaţia, Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu S. Antim* (lic. Beiuş), *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit, Timişoara), *Soare Mircea* şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2088. — *Să se stabilească identitatea*

$$2\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos 2\alpha\sin^2\alpha = 1.$$

HERMANN KNOPF

Soluție. Notând cu E primul membru și ținând seamă că,

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

putem scr succesiv,

$$E = 2\cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \cos 2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$= 2\cos^2 - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-ra *Tarța Valeria* (lic. Carmen Sylva, Timi-ra și de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuș), *Belea C. Gh.* c. Beiuș), *Bitang Alexandru* (Polit., Timișoara), *Boriu I. Nicolae* (Beiuș), *Chiriac C.* (Lt), *Creța F. Ga* (Polit., Timișoara), *Deme T. Gheorghe* (lic Beiuș), *Enescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timișoara), *Gâță Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Georgescu C. N.* (Polit, Timi-ș), *Godea Ioan* (lic. Beiuș), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuș), *Ib Eugen* (Cpt.), *Ieșan Alexandru* (lic. Matei Basarab, ureș), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Iosifescu Cicerone*, *sky Ioan* (Timișoara), *Knopf Adalbert* (lic. Banația. nișoara), *Luca I. Ioan* (Polit., Timișoara), *Mahrenholz hannes* (Cottbus), *Mesch Josef* (Timișoara), *Mureșiu Antim* c. Beiuș), *Olteanu Gr. Joan* (Polit, Timișoara), *Pat I. Ioise* (lic Beiuș), *Pălăceanu V.* (lic. Milit, Timișoara), *Pop Emil* (Polit, Timișoara), *Sabău Mihai* (lic. Beiuș), *Șipoș I. Eugen* (Polit., Timișoara), *Soare Mircea* și *Wegener Eugen* (București).

PROBLEME PROPUSE

2023 [1]. — Să dă un triunghiu dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este a.

Să se calculeze în funcție de a elementele patrulaterului (unghiuri, laturi și suprafață) format de bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor ascuțite B și C

MIHAI BOTEZ

2122. — Să se găsească patratul de cinci cifre $abcde$ știind că diferența $ab - de$ sau $de - ab$ este egală cu c sau c^2.

G-L GH. BUICLIU

2123. — Dacă n este un număr prim, să se arate că expresia

$$E = n^{94} - n^{66} - n^{28} + 1$$

se divide cu 1943.

CAP EUGEN ȘT. IACOB

2124. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x(x+1) = a(x+y+1) \\ y(y+1) = b(x+y+1). \end{cases}$$

LT ADRIAN POPESCU

2125. — Să se rezolve în numere raționale ecuația

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2.$$

JOHANNES MAHRENHOLZ

2126. — Să se studieze seria cu termenul general

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{n}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}\right),$$

α fiind un parametru variabil.

EUGEN I. SIPOS

2127. — Se consideră un punct D în planul triunghiului A B C.

Isogonalele dreptelor C A, C B, C D față de triunghiul A B D se întâlnesc în C′ și de asemenea isogonalele dreptelor B A, B C, B D față de triunghiul A C D se întâlnesc în B′.

Să se arate că D A este perpendiculară pe B′ C′ în mijlocul său.

E. ARGHIRIADE

2128. — Se dă paralelogramul A B C D și se duce o dreaptă variabilă prin A care taie pe B C în E și C D în F. Să se afle locul intersecției lui D E cu dreapta care unește F cu punctul I ce împarte pe B E în raportul dat B I : I E = k. Să se găsească înfășurătoarea lui F I. Să se studieze problema analoagă pentru cazul unui patrulater A B C D.

N. ABRAMESCU

2129. — Să se stabilească identitatea:

$$\cos 12t + 2\cos 10t + 3\cos 8t + 6\cos 6t + 7\cos 4t + 8\cos 2t + 5 = 32\cos^2 t\cos^2 2t\cos^2 3t.$$

V. ALACI

[1]) Publicăm din nou problema 2023 cu enunțul completat.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bitang Alexandru, (2029, 2030, 2034, 2061, 2095, 2103, 2106, 2109, 2112, 2113, 2120, 2121); **Chiriac I. C-tin.** (2026, 2035, 2039, 2042, 2063, 2065, 2072, 2074, 2077, 2086, 2087, 2089, 2092, 2094, 2097, 2105, 2107, 2113, 2120); **Colesnic I. D-tru** (2086, 2087, 2097); **Enăchescu Gr. Ion,** (1717, 2050, 2066, 2105); **Georgescu Nicolin,** (2029, 2030, 2031, 2041, 2054, 2057, 2060, 2097, 2113); **Gheorghin C. Octav,** (2086 2103, 2113); **Gloden A.,** (N.); **Iacob Șt. Eugen,** (P; 1385, 1554, 1571, 1643, 1842, 1844, 1922 1956, 2043); **Miclea N.** (2115); **Oprea D. Gheorghe,** (2116, 2118, 2120, 2121); **Oprea D. Nifon,** (2120, 2121); **Pălăceanu D. Vasile,** (2020, 2033, 2035, 2050 2054, 2060, 2061, 2066, 2073, 2083, 2089, 2097, 2113, 2120 **Petrovici B. Adalbert,** (2043, 2098); **Soare Mircea,** (2052, 2060, 2071, 2110, 2115); **Ștefănescu Marin,** (A; P; 2115, 2117); **Tarczewski Antoni,** (2121); **Wegener Eugen,** (P; 1389, 1393, 1582, 1622, 1643, 1652, 2018, 2035 2041, 2095, 2098, 2112, 2113, 2120, 2121).

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires, et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacția „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timișoara.

2. *Corneliu N. Popescu,* profesor, Str. Piscului 6, București V.

3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareș No. 41, Piatra-Neamț,

4. *Dr. Mihail Șt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamț.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme le-au fost considerate, că aceasta se datorește s faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sa au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Legându-se colecțiile R. M. T., anii I—XXII, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II—XXII, cu prețul de lei 300 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

ANUL XXIII. MAIU 1943 No. 3.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU:** O OBSERVARE LA IMPARTIREA POLINOAMELOR.
2. **P. SERGESCU:** ASUPRA UNEI GENERALIZARI A ECUATIILOR DIFERENTIALE OMOGENE DE ORDINUL INTAI.
3. **N. ABRAMESCU:** METODA PENTRU REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICA.
4. NOTE MATEMATICE 6, 7.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1036, 2029, 2030, 2036, 2037, 2041, 2066, 2071.
7. PROBLEME PROPUSE: 2130–2137.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noăstre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Cu plăcere anunţăm, că începând de la 15 Maiu 1943 mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi D-l *Nicolae V. Chircoiaşiu*, licenţiat în matematici şi asistent universitar la Facultatea de Ştiinţe, Timişoara, colaborator distins al revistei noastre.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 3 TIMISOARA, MAIU 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

O OBSERVARE LA ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

DE

D. POMPEIU.

1. În cursurile de Algebră se explică operațiile ce trebuesc efectuate pentru a găsi, când se dau două polinoame U și V (U de grad mai mare de cât V), câtul Q și restul R al împărțirei:

(1) $$U \equiv Q \cdot V + R,$$

R se înțelege mai mic în grad ca V.

Dar, pentru această operație a împărțirei polinoamelor se poate pune o chestiune care are *analogie* la *sistemele de ecuații liniare*.

Și anume: Știm că la sistemele de ecuații lineare sunt procedee de a opera pentru a ajunge la valorile necunoscutelor

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots$$

și întroducerea *determinanților* ne permite, odată *teoria rezolvării* sistemelor făcută, să scriem de-a dreptul rezultatele, *economisind* și timpul și munca.

La împărțirea polinoamelor aceiași situație: *teoria* ne învață cum să operăm ca să ajungem la identitatea (1), lucru bine stabilit și bine cunoscut; dar, pentru cazuri precise de împărțire (în loc de a utiliza procedeele operatorii indicate, în general, de teorie) se pot cere *forme-tip* pentru a nu mai recurge la operațiile pe care ni le a indicat teoria.

Chestiune de *economie*, așa cum cere *Mach*, ca o însușire esențială a Științei.

2. E o lacună care se împlinește ușor și, pentru a lua un exemplu de tot simplu, ne vom ocupa de cazul când U este de gradul 3, iar V de gradul 2.

Fie de împărțit polinomul

$$U = A x^3 + B x^2 + C x + D$$

prin polinomul

$$V = x^2 + p x + q.$$

Pentru a mai varia procedeul operatoriu, voiu întrebuința o metodă ce mi-a servit, cu succes, în cursul meu de *Geometrie Analitică*, de la Școala Politehnică din București (la schimbarea *sistemului de referință:* axe oblice) și pe care o putem numi *metoda identităților*.

Scriu mai întâiu pe U sub forma

(2) $$U \equiv x^2 (A x + B) + C x + D$$

apoi, întrebuințând identitatea

(3) $$x^2 \equiv (x^2 + p x + q) - (p x + q)$$

duc această valoare a lui x^2 în relația (2) și am

$$U \equiv [(x^2 + p x + q) - (p x + q)] (A x + B) + C x + D,$$

ceia ce dă

$$U \equiv (x^2 + p x + q)(A x + B) - (p x + q)(A x + B) + C x + D.$$

Iar, în produsul efectuat

$$(p x + q)(A x + B) \equiv A p x^2 + (A q + B p) x + B q$$

înlocuesc, din nou pe x^2 cu valoarea din identitatea (3), valoare ce ne-a servit deja, și am

$$(p x + q)(A x + B) \equiv A p [x^2 + p x + q) - (p x + q)] + (A q + B p) x + B q$$

iar, revenind la U, obțin în definitiv identitatea

(4) $$A x^3 + B x^2 + C x + D \equiv (A x + B - A p)(x^2 + p x + q) + (C + A p^2 - A q - B p) x + (D - B q + A p q).$$

Avem astfel împărțirea efectuată și cunoaștem în identitatea:

$$U \equiv Q \cdot V + R$$

și polinomul Q, câtul — și restul R.

3. Iar acum, în perfectă analogie cu ce se petrece la sistemele de ecuaţii liniare — având *forma-tip* (4), pentru orce aplicare *numerică*, nu mai e nevoe să reîncepem operaţiile indicate de teorie: n'avem de făcut de cât să înlocuim literele

$$A, B, \ldots, p, q, \ldots$$

cu valorile lor numerice.

4. *Forme-tip*, analoage cu (4) se pot alcătui pentru orce împărţire de polinoame, când ni se dă gradele lui U şi a lui V.

5. O aplicare interesantă, în *Aritmetică*, a *formelor-tip* de felul lui (4), când

$$x = 10,$$

iar literele A, B, ..., p, q, sunt numere întregi — este aceia ce se face la stabilirea *caracterelor de divizibilitate*.

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE OMOGENE DE ORDINUL ÎNTÂI

DE

P. SERGESCU.

În şedinţa de la 4 Martie 1943 a „Seminarului de Matematici din Cluj", la Timişoara, D-l *Gh. Th. Gheorghiu* a cerut să se generalizeze integrarea ecuaţiei

$$y' = f\left(\frac{a x + b y + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right).$$

Rândurile ce urmează sunt o urmare a acestei cereri. Lipsa completă de bibliografie, provocată de evacuarea Clujului şi de situaţia actuală, nu ne permite să afirmăm că consideraţiile acestea sunt cunoscute sau nu.

Să considerăm ecuaţia:

$$y' = f\left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right),$$

unde P şi Q sunt polinoame de gradul n în x şi y. Pentru ca transformarea

$$x = u + \alpha, \qquad y = v + \beta$$

s'o aducă la o ecuaţie omogenă:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{p(u, v)}{q(u, v)}\right)$$

— unde p şi q sunt ansamblele termenilor de gradul n în P şi Q — e necesar şi suficient ca punctul (α, β) să fie un punct multiplu de ordinul n pe fiecare din curbele de ordinul n:

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0.$$

Dar atunci $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ se reduc la produse de câte n factori *lineari* (reali sau complexi), care egalaţi cu zero, reprezintă drepte concurente în acelaş punct (α, β).

Cum recunoaştem că ecuaţia

$$A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

— în care $A(x, y)$ şi $B(x, y)$ sunt polinoame — face parte din această clasă de ecuaţii diferenţiale? Avem:

$$-\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = f\left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right).$$

Trebue deci ca grupând pe A şi B după P şi Q să obţinem polinoame de *acelaş grad p* şi *omogene* în P şi Q. Cum P=0 şi Q=0 admit punctul (α, β) ca punct multiplu de ordinul n, rezultă că curbele $A(x, y) = 0$ şi $B(x, y) = 0$ admit pe (α, β) ca punct multiplu de ordinul de multiplicitate pn egal cu gradul polinoamelor A şi B.

Prin urmare, pentru a recunoaşte dacă (1) e de forma considerată, formăm ecuaţiile:

$$A=0,\ \frac{\partial A}{\partial x}=0,\ \frac{\partial A}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}=0, \cdots \frac{\partial^{np-1} A}{\partial x^{np-1}}=0,\ \frac{\partial^{np-1}}{\partial x^{np-2}\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^{np-1} A}{\partial x^{np-2}\,\partial y^2}=0, \cdots \frac{\partial^{np-1} A}{\partial y^{np-1}}=0, \tag{2}$$

$$B=0,\ \frac{\partial B}{\partial x}=0,\ \frac{\partial B}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}=0, \cdots \frac{\partial^{np-1} B}{\partial x^{np-1}}=0,$$

$$\frac{\partial^{np-1} B}{\partial x^{np-2}\,\partial y}=0, \cdots \frac{\partial^{np-1} B}{\partial y^{np-1}}=0.$$

Dacă toate aceste ecuații admit un sistem comun de soluții α, β, atunci suntem în cazul considerat și substituția $x = u + \alpha$ și $x = v + \beta$ transformă ecuația (1) într'o ecuație omogenă a cărei integrare se știe face.

Exemple. 1°. Să se integreze ecuația:

$$(3)\quad (y^2 + xy - y)\,dx = (x^2 - xy - 2x + y + 1)\,dy.$$

Sistemul (2) devine

$$A = y^2 + xy - y = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 2y - 1 + x = 0,$$

$$-B = x^2 - xy - 2x + y + 1 = 0,$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = 2x - y - 2 = 0, \quad -\frac{\partial B}{\partial y} = -x + 1 = 0$$

și toate ecuațiile admit soluția $x = 1,\ y = 0$.

Făcând substituția

$$x = u + 1, \qquad y = v,$$

ecuația (3) devine omogenă:

$$v(u + v)\,du = u(u - v)\,dv.$$

Punând acum

$$v = tu,$$

obținem succesiv

$$u\frac{dt}{du} = \frac{(1 + t)t}{1 - t} - t = \frac{2t^2}{1 - t},$$

$$\frac{1 - t}{t^2}\,dt = \frac{2\,du}{u},$$

$$\log u^2 = \log C - \log t - \frac{1}{t},$$

$$tu^2 e^{\frac{1}{t}} = C, \qquad uv e^{\frac{u}{v}} = C,$$

așa că integrala generală a ecuației (3) este

$$(x - 1)\,y\,e^{\frac{x-1}{y}} = C.$$

2°. Să se integreze ecuația:

$$(4)\quad \begin{aligned} &2(x^2 y - y^3 - x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y)\,dx = \\ &(2x^3 + 3x^2 y - 2xy^2 - 9x^2 - 2xy + 2y^2 + \\ &10x - y - 3)\,dy. \end{aligned}$$

Aci sistemul (2) conduce la rădăcina comună $\alpha = 1,\ \beta = 1$ și deci vom aplica transformarea:

$$x = u + 1, \qquad y = v + 1.$$

Ecuația (4) devine omogenă:

$$2v(u^2 - v^2)\,du = u(u + 2v)(2u - v)\,dv.$$

Punând

$$v = tu,$$

obținem:

$$\frac{du}{u} = \frac{2t^2 - 3t - 2}{3t^2}\,dt,$$

de unde

$$\log u = \log C + \frac{2}{3}t - \log t + \frac{2}{3t},$$

$$\log tu = \log C + \frac{2}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

$$v = C\,e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{t^2+1}{t}} = C\,e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{u^2+v^2}{uv}}.$$

Integrala generală a ecuației (4) este deci:

$$y - 1 = C\,e^{\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+y^2-2x-2y+2}{xy-x-y+1}}.$$

METODĂ PENTRU REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ

DE

N. ABRAMESCU.

Vom expune o metodă pentru rezolvarea unor probleme, mai simplă și mai ușoară, decât metoda directă, care este mai greoaie și nu așa elegantă.

Să considerăm punctul F(c, d) *dat în planul unei conice cu centru*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 1 = 0$$

și două puncte variabile P *și* Q *pe această conică, astfel ca* FP *și* FQ *să fie paralele cu doi diametri conjugați ai conicei. Să găsim locul punctului* M(X, Y) *de intersecție al tangentelor în* P *și* Q *la conică.*

Se vede că PQ este polara

$$\frac{xX}{p} + \frac{yY}{q} - 1 = 0$$

a lui M(X, Y) în raport cu conica, iar coordonatele (x_1, y_1) ale lui P verifică ecuațiile conicei și polarei

$$(2)\qquad \begin{aligned} f(x_1, y_1) &= \frac{x_1^2}{p} + \frac{y_1^2}{q} - 1 = 0, \\ g(x_1, y_1) &= \frac{x_1 X}{p} + \frac{y_1 Y}{q} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Să găsim ecuația dreptelor care unesc punctul $F(c, d)$ cu punctele de intersecție $P(x_1, y_1)$ ale conicei cu polara. Aceasta înseamnă să găsim o relație între coordonatele (x, y) ale unui punct R al acestor drepte. Pentru aceasta, să observăm că $P(x_1, y_1)$ este pe dreapta definită de punctele $R(x, y)$ și $F(c, d)$. Deci, coordonatele sale sunt de forma

$$x_1 = \frac{x + c\,t}{1 + t}, \quad y_1 = \frac{y + d\,t}{1 + t}, \quad t = \frac{FP}{PR}.$$

Să scriem că verifică ecuațiile (2), ale celor două curbe care se taie în P. Obținem

$$\frac{1}{p}\frac{(x + c\,t)^2}{(1 + t)^2} + \frac{1}{q}\frac{(1 + d\,t)^2}{(1 + t)^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{1}{p}\frac{(x + c\,t)X}{1 + t} + \frac{1}{q}\frac{(y + d\,t)Y}{1 + t} - 1 = 0,$$

de unde

$$t^2\left(\frac{c^2}{p} + \frac{d^2}{q} - 1\right) + 2\,t\left(\frac{c\,x}{p} + \frac{d\,y}{q} - 1\right) + \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 1 = 0,$$

$$t\left(\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1\right) + \frac{x\,X}{p} + \frac{y\,Y}{q} - 1 = 0.$$

Din acestea trebue să eliminăm pe t. Înlocuind în prima valoarea lui t din ultima, obținem

$$(3)\qquad \left(\frac{c^2}{p} + \frac{d^2}{q} - 1\right)\frac{\left(\frac{X\,x}{p} + \frac{Y\,y}{q} - 1\right)^2}{\left(\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1\right)^2}$$

$$-2\,\frac{\frac{X\,x}{p} + \frac{Y\,y}{q} - 1}{\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1}\left(\frac{c\,x}{p} + \frac{d\,y}{q} - 1\right) + \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 1 = 0,$$

o ecuație de forma

$$A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + \cdots = 0.$$

Aceasta este ecuația celor două drepte FP și FQ, care unesc punctul F cu punctele de intersecție ale conicei (1) cu polara lui M. Ecuația care dă coeficienții lor unghiulari m_1, m_2 este

$$C\,m^2 + 2\,B\,m + A = 0$$

și avem

$$(4)\qquad m_1 m_2 = \frac{A}{C}.$$

Dar FP și FQ, cu coeficienții unghiulari m_1, m_2 sunt paralele cu doi diametri conjugați ai conicei date, cu ecuația (1),

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 1 = 0.$$

Se știe că între coeficienții unghiulari m_1, m_2 a doi diametrii conjugați ai acestei conice există relația

$$m_1 m_2 = -\frac{q}{p}.$$

Egalând cu (4), avem

$$(5)\qquad A\,p + B\,q = 0,$$

unde A și C sunt coeficienții lui x^2 și y^2 din ecuația (3)

$$A = \left(\frac{c^2}{p} + \frac{d^2}{q} - 1\right)\frac{\frac{X^2}{p^2}}{\left(\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1\right)^2} - 2\,\frac{\frac{c\,X}{p^2}}{\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1} + \frac{1}{p},$$

$$C = \left(\frac{c^2}{p} + \frac{d^2}{q} - 1\right)\frac{\frac{Y^2}{q^2}}{\left(\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1\right)^2} - 2\,\frac{\frac{d\,Y}{q^2}}{\frac{c\,X}{p} + \frac{d\,Y}{q} - 1} + \frac{1}{q}.$$

Înlocuind în (5), obținem

$$\left(\frac{c^2}{p}+\frac{d^2}{q}-1\right)\left(\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}\right)-2\left(\frac{cX}{p}+\frac{dY}{q}-1\right)=0,$$

$$\frac{1}{p}\left(X-\frac{c}{k}\right)^2+\frac{1}{q}\left(Y-\frac{d}{k}\right)^2=\frac{1-k}{k^2},$$

$$k=\frac{c^2}{p}+\frac{d^2}{q}-1,$$

care arată că locul lui M este o conică de acelaşi gen ca şi conica dată, cu centrul pe dreapta care uneşte centrul conicei date cu punctul F.

În cazul particular când F este unul din focarele conicei [1], $c^2=p-q$, $d=0$, locul este

$$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}-\frac{2cX}{q}-\frac{2p}{q}=0,$$

$$\frac{1}{p}\left(X-\frac{cp}{q}\right)^2+\frac{1}{q}Y^2=\frac{p}{q^2}(p+q).$$

NOTE MATEMATICE

6. — *Asupra omografiilor care lasă neschimbată o ecuaţie de gradul al doilea.*

În „Gazeta Matematică“ 1936, p, 561, D-l Prof. *T. Angheluţă*, a determinat omografiile:

(1) $$x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},$$

care transformă ecuaţia:

(2) $$ax^2+bx+c=0$$

în ea însăşi, sau într'o altă ecuaţie dată. Îmi propun să regăsesc pe o cale geometrică, o parte din rezultatele D-lui Prof. *T. Angheluţă* şi anume, omografiile care lasă ecuaţia neschimbată.

Să începem prin a reaminti câteva proprietăţi ale transformărilor omografice. Considerăm două drepte D′ şi D″, având pe fiecare o origine şi un sens pozitiv, astfel că fiecare punct după D′ are o abscisă x şi fiecare punct depe D″ o abscisă y; relaţia (1) stabileşte o transformare omografică între punctele celor două drepte. Dacă cele două drepte se confundă D′ ≡ D″ ≡ D, fiecare punct depe D, considerat de abscisă x, are un *omolog* de abscisă y, dat de relaţia (1); există pe dreaptă două puncte, numite *puncte duble*, care coincid cu omologul lor şi dacă abscisele x şi y au aceiaş origine, punctele duble se obţin făcând în (1), $y=x$; obţinem astfel ecuaţia:

(3) $$\gamma x^2+(\delta-\alpha)x-\beta=0.$$

Dacă notăm cu x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei (2), rezultă că omografiile care lasă neschimbată ecuaţia (2), sunt de două feluri: sau lasă nechimbate rădăcinile x_1, x_2 sau le schimbă între ele; deci aceste omografii admit rădăcinile ecuaţiei date ca puncte duble sau ca puncte omoloage.

În primul caz, punctele duble (3), trebuind să fie tocmai rădăcinile ecuaţiei (2), urmează că cele două ecuaţii au aceleaşi rădăcini şi deci avem:

$$\frac{\gamma}{a}=\frac{\delta-\alpha}{b}=\frac{-\beta}{c},$$

de unde deducem:

(4) $$\beta=-\frac{c\gamma}{a}, \qquad \delta=\frac{a\alpha+b\gamma}{a}.$$

care sunt tocmai formulele 2° ale D-lui Prof. *Th. Angheluţă*.

În al doilea caz, considerând omografiile care transformă între ele rădăcinile ecuaţiei, rezultă că punctele de abscisă x_1, x_2, considerate ca aparţinând lui D′, au ca omoloage în D″ respectiv pe x_2 şi x_1. Deducem atunci că punctul x_1, fie că îl considerăm ca aparţinând dreptei D′, fie dreptei D″, are acelaş omolog, pe x_2. Se ştie că o omografie, posedând un punct care se bucură de proprietatea de mai sus, poartă numele de involuţie şi este caracterizată prin $\alpha+\delta=0$ (Vezi Traité de Géométrie, *Rouché* şi *Comberousse*, Vol. II, p. 378). Omografia (1) devine în acest caz:

$$\gamma xy-\alpha(x+y)-\beta=0$$

şi deoarece punctul x_1 se transformă în x_2, urmează că relaţia de mai sus este verificată, dacă punem $x=x_1$, $y=x_2$; obţinem

$$\gamma x_1 x_2-\alpha(x_1+x_2)-\beta=0$$

şi înlocuind pe x_1+x_2 şi x_1x_2 cu valorile deduse din (2), găsim:

(5) $$\beta=\frac{b\alpha+c\gamma}{a}, \qquad \delta=-\alpha,$$

---

[1]) Problemă dată la Examenul de Capacitate în 1902.

care sunt tocmai formulele 1° ale D-lui Prof. *Th. Angheluță*. Formulele (4) și (5) determină pe β și δ în funcție de α și γ, care rămân arbitrari. Există și printre omografiile (4), o involuție admițând rădăcinile ecuației ca puncte duble; ea este dată de:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{b}{2a}.$$

Deci *omografiile care lasă neschimbată o ecuație de gradul al doilea, sunt omografiile care admit rădăcinile ecuației date ca puncte duble, sau involuțiile care admit aceste rădăcini ca o pereche de puncte omoloage.*

E. ARGHIRIADE

---

7. — *Asupra problemei 2021.*

La pag. 11 din volumul XXII s'a dat o soluție acestei probleme care cere să se arate că polinomul

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

este divizorul expresiei

$$P(x) = (x-1)[(x-1)^{2(2n+1)} + 3] - x^2.$$

Îmi propun în cele ce urmează să dau o altă soluție. Notăm pentru prescurtare divizorul cu $Q(x)$ și observăm că

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = xQ(x) + 1,$$

de unde reiese,

$$(x-1)^{4n} = [xQ(x) + 1]^n = Q_1(x)Q(x) + 1,$$

$Q_1(x)$ fiind un polinom ce se obține dând pe $Q(x)$ factor în primii n termeni din desvoltarea binomului.

Expresia $P(x)$ devine,

$$P(x) = [Q_1(x)Q(x) + 1](x-1)^3 + (3x - 3 - x^2),$$

sau,

$$P(x) = Q_1(x)Q(x)(x-1)^3 + (x^3 - 4x^2 + 6x - 4),$$

și în fine,

$$P(x) = Q(x)[Q_1(x)(x-1)^3 + 1],$$

ceeace ne arată că $P(x)$ se divide prin $Q(x)$.

EUGEN I. SIPOS

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, No. 8, Aprilie 1943. † Profesorul *Andrei Gh. Ioachimescu*, de *Alexandru Stoenescu*. Note despre trecutul Matematicii în Craiova, de *P. Sergescu*. Asupra unei probleme de Geometrie, de. *C. Borș*. Premiul *„Inginer Roșu"*, de *Gabriela Țițeica*, Ing. *D. Stoica* și *Al. Al. Roșu*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Știință și Progres*. Identități algebrice, de *Ionel I. Stamate*. Asupra unui sistem de ecuații, de *Ionel I. Stamate*. Avitaminoza la plante, de *Ioan Ciobanu*. Smochinul și răspândirea lui în România, de *Eugen V. Ghișa*. Viața lui *Galileo Galilei*, de *Victor Marian*. Diverse, și probleme propuse.

3 *N. Abramescu*. Lecțiuni de Geometrie.

Sub acest titlu, într'un volum litografiat format mare (106 pag.), cunoscutul și distinsul profesor universitar *N. Abramescu*, după o introducere istorică relativ la dezvoltarea geometriei, tratează într'o formă elementară, clară, strâns înlănțuită și pur geometrică, frumoasele și minunatele proprietăți ale figurilor plane și în spațiu. Aceste proprietăți, expuse magistral de un profund cunoscător al secretelor celor mai intime ale figurilor, dau o mare satisfacție și formează un bogat izvor de cunostințe pentru cetitor, fie el elev, student sau profesor.

Recomand călduros acest volum cetitorilor noștrii, care se pot adresa direct autorului, la Facultatea de Științe, Timișoara.

4. *M. Ghermănescu*. Sur une classe d'équations fonctionnelles du premier ordre. (Extrait des Acta Matematica, tome 75).

5. *M. Ghermănescu*. Sur une équation fonctionnelle. (Extrait du „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timișoara, Tome 11, Fasc. 1—2).

6. Dr. Ing. *V. Patriciu*. Die rumänische Erdölgesetzgebung und Endwicklung der Erdölindustrie. (Sonderdruck aus Oel und Kohle 38, 1942).

7. *I. G. Murgulescu* und *E. Lațiu*. 0-Chlorbenzoesäure als Urtitersubstanz in der Jodometrie. (Sonderabdruck aus Zeitschrift für analytische Chemie, Bd. 125, Heft. 7 u. 8.)

8. *I. G. Murgulescu* und *E. Lațiu*. Die konductometrische Bestimmung der Jodate mit starker Säuren (Id.).

9. *I. G. Murgulescu* und *V. Alexa*. 0-Chlorbensäure als Urtitersubsubstanz für die Acidimetrie (Id.).

PROBLEME REZOLVATE

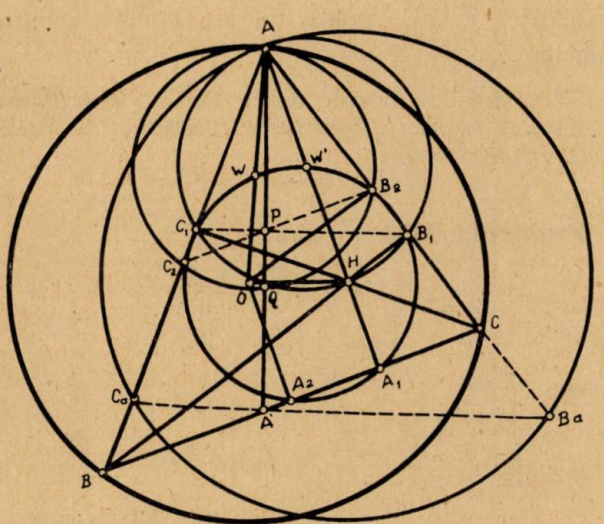
Problema 1036. — *În triunghiul* A B C, *prin picioarele cevienilor perpendiculare pe dreapta care unește centrul cercului circumscris cu ortocentrul, se duc paralele* D_a, D_b, D_c *cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ortic. Cercurile circum-*

scrise triunghiurilor (D_a, AB, AC), (D_b, BC, BA), (D_c, CA, CB) *sunt concentrice şi au centrul în ortocentrul triunghiului* ABC.

C. Ionescu Bujor

Soluţia I. Fie A_1, B_1, C_1, picioarele înălţimelor; A_2, B_2, C_2 picioarele medianelor; O centrul cercului circumscris; H ortocentrul triunghiului ABC. Perpendiculara din A pe OH taie pe BC în A', iar dreapta D_a perpendiculară în A' pe AA', taie pe AB şi AC în C_a şi B_a. Fie încă P intersecţia dreptelor AA' şi B_1C_1.

În articolul *„Extinderi în geometria triunghiului"* din „R. M. T.", Vol. IX, pag. 3, D-l *C. Ionescu-Bujor* a demonstrat că P se află pe B_2C_2. Deci rezultă că triunghiurile AB_1C_1, AB_aC_a sunt omotetice în raportul $\frac{1}{2}$. Se mai ştie că cercul AB_1C_1 are centrul w' în mijlocul lui AH, deci omoteticul său cercul AB_aC_a va avea centrul în punctul H, omoteticul lui A faţă de w'. La fel se arată că celelalte două cercuri din enunţ au centrul în H.



Soluţia II. Fie w centrul cercului AB_2OC_2. Se ştie că w este mijlocul lui AO. Dreapta AA' fiind perpendiculară pe OH, este perpendiculară şi pe paralela la ww', care uneşte mijloacele lui AO şi AH. Cum w, w' sunt şi centrele cercurilor AB_2OC_2, AB_1HC_1, rezultă că AA' este axa radicală a acestor cercuri şi trece atât prin intersecţia lor Q, cât şi prin centrul radical al cercurilor AB_2OC_2, AB_1HC_1, $C_1C_2B_1B_2$, care este intersecţia P a dreptelor B_1C_1, B_2C_2. Cum B_2, C_2 sunt mijloacele laturilor AC, AB rezultă că P este mijlocul lui AA' şi cum B_1C_1, care trece prin P, este paralelă cu B_aC_a, urmează că B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor AB_a, AC_a în triunghiul AB_aC_a, deci HB_1, HC_1 sunt mediatoare în acest triunghiu, al cărui cerc circumscris este punctul H.

Notă. 1°. Soluţia I este redijată după soluţia trimisă la 5 Iunie 1932 de D-l *N. N. Mihăileanu,* pe atunci elev la Lic. din Constanţa, iar soluţia II după soluţia trimisă de d-l *C. Ivănescu* când era elev la Lic. Bârlad.

2°. D-l *C. Coşniţă,* când era student în anul III, a trimis o frumoasă soluţie cu ajutorul teoremei cevienelor şi a generalizat problema în felul următor:

Fie ABC *un triunghiu oarecare,* A', B', C' *picioarele cevienelor unui punct* P *de pe cubica lui Lucas (locul lui* P *este astfel că perpendicularele în* A', B', C' *pe* BC, CA, AB *sunt concurente); $\alpha\beta\gamma$ polara trilineară a punctului* P. *Paralelele duse prin* A, B, C *la dreapta $\alpha\beta\gamma$ întâlnesc laturile opuse în* a, b, c. *Fie* D_a, D_b, D_c *paralelele duse din* a, b, c *la laturile corespunzătoare ale triunghiului* $A'B'C'$. *Cercurile* (D_a, AB, AC), (D_b, BC, BA), (D_c, CA, CB) *au centrul comun în* Q.

Ca aplicaţii particulare, pe lângă cazul problemei 1036, D-l *C. Coşniţă* a considerat şi cazurile când P este punctul lui *Gergonne* şi al lui *Nagel,* Q fiind respectiv centrul cercului înscris sau circumscris triunghiului ABC.

3°. O bună soluţie trigonometrică a dat d-l *Pop L.*

G-l Gh. B.

Problema 2029 — *Să se găsească extremele funcţiei*

$$x^3-3x^2y+6x^2-y+3=0.$$

Prima soluţie. Funcţia dată, sub formă explicită, se poate scri

$$(1)\qquad y=\frac{x^3+6x^2+3}{3x^2+1}.$$

Ştim că, valorile reale ale variabilei care fac maximă sau minimă o funcţie, sunt acele care anulează prima derivată şi ne dau pentru derivata a 2-a o valoare finită, negativă în cazul maximului şi pozitivă în cazul minimului.

Calculăm astfel primele două derivate şi avem

$$y'=\frac{(3x^2+12x)(3x^2+1)-6x(x^3+6x^2+1)}{(3x^2+1)^2}=$$

$$\frac{3x(x^3+x-2)}{(3x^2+1)^2}=\frac{3x(x-1)(x^2+x+2)}{(3x^2+1)^2},$$

$$y''=3\frac{(4x^3+2x-2)(3x^2+1)^2-12x(3x^2+1)(x^4+x-2)}{(3x^2+1)^4}$$

Acum observăm că derivata întâia a funcției (1) se anulează numai pentru valorile reale $x=0$ și $x=1$.

Cum pentru $x=0$ avem $y''=-6<0$, iar pentru $x=1$ avem $y''>0$, rezultă că funcția dată este maximă pentru $x=0$ și minimă pentru $x=1$, mai precis, avem:

$$y_M=3 \quad \text{și} \quad y_m=\frac{5}{2}.$$

Soluții analoage date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuș), *Barbu Virgil* (Polit., Timișoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timișoara), *Belea C. Gh.* (lic. Beiuș), *Burghiu D. Ioan* (lic. Titu Maiorescu, București), *Creța F. Gavril* (Polit., Timișoara), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Lt), *Enăchescu Gr. Ioan* (lic. Milit., Timișoara), *Georgescu Nicolin*, *Godea Ioan* (lic. Beiuș), *Grigoriu N.* (lic. Titu Maiorescu, București), *Ieremia I. Aurel* (Polit., Timișoara), *Kinsky Ioan* (Timișoara), *Lupescu Corneliu* (Lt, Roman), *Moisă I. Gh.* (Sublt, Bacău), *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit., Timișoara), *Pat I. Moise* (lic. Beiuș), *Sabău Mihai* (lic. Beiuș), *Șipoș I. Eugen* (Polit, Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Soluția 2-a. Să considerăm ecuația dată ca definind funcția y de variabila x și să notăm cu $f(x,y)$ primul membru.

Conform teoriei, sistemul

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x,y)=0 \\ f'_x(x,y)=0 \end{cases}$$

dă valorile lui x și y; valoarea lui y astfel aflată fiind maximă sau minimă, după cum produsul $f''_{x^2}\cdot f'_y$ este pozitiv sau negativ.

În cazul nostru, sistemul (1) devine

$$(1') \begin{cases} f(x,y)=x^3-3x^2y+6x^2-y+3=0 \\ f'_x(x,y)=3x^2-6xy+12x=3x(x-2y+4)=0, \end{cases}$$

iar produsul $f''_x\cdot f'_y$ devine

$$(2) \qquad f''_{x^2}(x,y)\,f'_y(x,y)=-6(x-y+2)(3x^2+1).$$

Sistemul (1'), admite întâi sistemul de soluții

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$$

și cum

$$f''_{x^2}(0,3)\,f'_y(0,3)=6>0,$$

rezultă că $y=3$ este o valoare maximă pentru funcția y.

Tot din sistemul (1) mai deducem sistemul

$$(3) \qquad \begin{cases} x-2y+4=0 \\ x^3-3x^2y+6x^2-y+3=0. \end{cases}$$

Substiind în ecuația 2-a pe y cu valoarea sa

$$(4) \qquad y=\frac{x+4}{2}$$

scoasă din prima ecuație din (3), găsim

$$x^3-(3x^2+1)\frac{x+4}{2}+6x^2+3=0,$$

sau după simplificări, avem

$$x^3+x-2=0$$

Această ecuație are singura soluție reală $x=1$, pentru care din (3) rezultă $y=\frac{5}{2}$ și fiindcă,

$$f''_{x^2}\left(1,\frac{5}{2}\right)f'_y\left(1,\frac{5}{2}\right)=-12<0,$$

rezultă că $y=\frac{5}{2}$ este o valoare minimă pentru funcția y.

Soluții analoage date de d-nii: *Barbu Virgil* (Polit., Timișoara), *Ieremia I. Aurel* (Polit, Timișoara) și *Moisă I Gh.* (Sub-lt, Bacău).

Problema 2030. — *Dacă*

$$y=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+2x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+2x^2}},$$

avem:

$$\frac{1+2x^2}{1+x^2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)y\right]+2y=\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

IOAN N. GLIGOR

Soluție. Scriind relația dată sub forma

$$y\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+2x^2}=\operatorname{arctg}\sqrt{1+2x^2}$$

și derivând în raport cu x, observând că y este funcție de x, obținem

$$y'\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+2x^2}+y\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+2x^2}+$$

$$y\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Înmulţind ambii membrii cu $\sqrt{1+2x^2}$, putem scri încă

$$(1+2x^2)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)y\right]+$$

$$2y(1+x^2)=\frac{x}{1+x^2}.$$

Împărţind acum ambii membrii prin $1+x^2$, găsim

$$\frac{1+2x^2}{1+x^2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)y\right]+2y=\frac{x}{(1+x^2)^2},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii bune date de d-ra *Popescu Maria* (Bucureşti) şi de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Barclaşiu I. Nicolae* (lic. Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Lt), *Deme Gheorghe* (lic. Beiuş), *Enăchescu Gr. Ioan* (lic. Milit., Timişoara), *Georgescu Nicolin*, *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Ieremia I. Aurel* (Polit., Timişoara), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Sabău Mihai* (lic. Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Stefănescu F. Marin* (Lt, Brăila), *Ţigănoiu Alexandru* (lic. Naţional, Iaşi), *Vasiliu A. B.* (lic. Chişinău).

Problema 2036. — *Se dă numărul $a\,b\,c$ care înmulţit cu 909 dă un alt număr de forma $a\,a\,b\,b\,c\,c$. La primul număr, cifra din mijloc este egală cu suma celorlalte două cifre, iar câtul dintre primul număr şi semisuma cifrelor lui are forma $c\,c$.*

CICERONE IOSIFESCU

Soluţie. Pentru ca produsul $a\,b\,c\times 909$ să se termine cu c, nu putem avea de cât,

(1) $$c=5.$$

Apoi, conform enunţului trebuie să mai avem

(2) $$a+5=b,\qquad (3)\quad \frac{a\,b\,5}{a+b+5}=\frac{55}{2}.$$

Relaţia (3), ţinând seamă de (2) devine

$$\frac{a\,b\,5}{2b}=\frac{55}{2},$$

sau

$$a\,b\,5=55\,b.$$

Această relaţie se mai poate scri încă

$$100\,a+10\,b+5=55\,b,$$

sau

$$20\,a+1=9\,b=9(a+5).$$

De aci deducem

$$11\,a=44,$$

deci

$$a=4,$$

iar din (2) rezultă $b=9$.

Numărul $a\,b\,c$ dat este astfel 495, căci având

$$495\times 909=449955,$$

înseamnă că 495 împlineşte toate condiţiile problemei.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Bordaşiu I. Nicolae* (lic. Beiuş), *Chiriac C.* (Lt), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Cristea D. Viorel* (Polit., Timişoara), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Lt), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Tg-Jiu), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Knopf Adalbert* (lic. Banaţia, Timişoara), *Knopf Hermann* (lic. Banaţia, Timişoara), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt, Roman), *Moisă I. Gheorghe* (Sub-lt, Bacău), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Olteanu Gr. Ioan* (Polit., Timişoara), *Păläceanu D. Vasile* (lic. Milit., Timişoara), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Petrovici Adalbert* (lic. Brad), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Sasu I. Ion* (lic. Beiuş), *Şipoş Eugen* (Polit., Timişoara), *Stefănescu Marin* (Lt, Brăila), *Preda I. D-tru* (lic. Slatina), *Turicu T. Octavian*, *Ţigănoiu Alexandru* (Brăila), *Vasiliu A. B.* (lic. Chişinău) şi *Wegener Eugen*.

Problema 2037. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} b\,x(1-y^2)=a\,y(1-x^2) \\ 2\,x(1-y^2)=a(1+x^2)(1+y^2) \end{cases}$$

şi să se găsească valorile exacte ale necunoscutelor, pentru $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{4}$.

FLORIAN I. GOGA

Soluţie. Sistemul dat se mai poate scri

(1) $$\begin{cases} \dfrac{b\,x}{1-x^2}=\dfrac{a\,y}{1-y^2} \\ \dfrac{2\,x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1-y^2}{1+y^2}=a. \end{cases}$$

Notând,

$$(2) \qquad x = \operatorname{tg}\frac{z}{2}, \quad y = \operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

sistemul (1) devine

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{2b\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}} = \dfrac{2a\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} \\ \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}} \cdot \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = a. \end{cases}$$

Având în vedere formulele cunoscute

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}, \quad \cos\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}},$$

sistemul (3) se mai poate scri

$$\begin{cases} b\operatorname{tg} z = a\operatorname{tg} t \\ \sin z \cdot \cos t = a, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{\sin z\cos t}{\sin t\cos z} = \dfrac{a}{b} \\ \sin z\cos t = a. \end{cases}$$

Mai simplu putem scri evident,

$$\begin{cases} \sin z\cos t = a \\ \sin t\cos z = b. \end{cases}$$

Adunând şi scăzând, obţinem

$$\begin{cases} \sin(z+t) = a+b \\ \sin(z-t) = a-b, \end{cases}$$

deci,

$$(4) \quad \begin{cases} z = \dfrac{\arcsin(a+b) + \arcsin(a-b)}{2}, \\ t = \dfrac{\arcsin(a+b) - \arcsin(a-b)}{2}. \end{cases}$$

Aceste valori ale lui z şi t înlocuite în (2) ne dau astfel valorile necunoscutelor x şi y.

Aplicaţie. Pentru $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, relaţile (4) ne dau

$$\begin{cases} z = \dfrac{\arcsin 1 + \arcsin\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{90^0+30^0}{2} = 60^0, \\ t = 30^0. \end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în (2), găsim

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ y = \operatorname{tg} 15^0 = 2-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Se pot obţine şi alte valori pentru x, y, luând pentru $\arcsin 1$ şi $\arcsin\frac{1}{2}$ alte determinaţiuni.

Soluţii analoage date de d-nii: *Burghiu D. Ioan* (lic. Titu Maiorescu, Bucureşti), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Alte soluţii date de d-nii: *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus) şi *Păläceanu D. Vasile* (lic. Milit, Timişoara).

Problema 2041. — *Să se arate că dacă avem*

$$\sec a + \sec b + \sec c = 0,$$

vom avea şi:

$$\Sigma\cos a(\sin^2 b + \sin^2 c) = 3\cos a\cos b\cos c + 2\Sigma\cos a.$$

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Relaţia de condiţie se mai poati scri

$$\frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} + \frac{1}{\cos c} = 0,$$

sau

$$(1) \qquad \cos a\cos b + \cos b\cos c + \cos c\cos a = 0,$$

fiindcă, evident, a, b, c sunt presupuşi $\neq \frac{\pi}{2}$.

Înmulţind (1) pe rând cu $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, avem

$$\cos^2 a\cos b + \cos a\cos b\cos c + \cos^2 a\cos c = 0,$$

$$\cos a\cos^2 b + \cos^2 b\cos c + \cos a\cos b\cos c = 0,$$

$$\cos a\cos b\cos c + \cos b\cos^2 c + \cos a\cos^2 c = 0.$$

Adunând aceste relaţii, obţinem

$$\cos a(\cos^2 b + \cos^2 c) + \cos b(\cos^2 c + \cos^2 a) + \cos c(\cos^2 a + \cos^2 b) + 3\cos a\cos b\cos c = 0,$$

sau

$$(2) \quad \Sigma\cos a(\cos^2 b + \cos^2 c) + 3\cos a\cos b\cos^2 c = 0.$$

Cum $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$, $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$, relaţia (2) devine

$$\Sigma \cos a\,(2 - \sin^2 b - \sin^2 c) + 3\cos a \cos b \cos c = 0,$$

sau

$$\Sigma \cos a\,(\sin^2 b + \sin^2 c) = 2\,\Sigma \cos a + 3\cos a \cos b \cos c,$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt), *Creţa N. Gavril* (Polit., Timişoara), *Dăscălescu St. Hristache* (Lt), *Enăchescu Gr. Ion* (lic Milit., Timişoara), *Georgescu Nicolin*, *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Kinsky Ioan* (Timisoara), *Luca I Ioan* (Polit, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt, Roman), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Preda I. D-tru* (lic Slatina), *Sasu Ion* (lic. Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Soare Mircea*, *Ţigănoiu Alexandru* (Brăila), *Vasiliu A. B.* (lic. Chişinău) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2066. — *Un număr, patratul şi cubul său se termină în aceiaşi cifră. Cubul este de forma a b c d a c e c, în care e este jumătatea lui a, iar suma tuturor cifrelor este patratul ultimei cifre.*

Care este acel număr?

I. CUREA

Soluţie. Numai numerile terminate în 0, 1, 5, 6 ridicate la patrat şi la cub, se termină în aceleaşi cifre, deci c poate fi 0, 1, 5, 6.

Cum însă suma tuturor cifrelor cubului cerut trebuie să fie c^2, se vede că c poate fi 5 sau 6. Apoi cifra e poate fi numai 1, 2, 3, 4, căci dublul ei, adică a, nu poate lua valori mai mari de cât 9 şi nici zero, fiindcă este început de număr.

Aşa fiind, cubul cerut poate avea următoarele terminaţiuni

(1) 515, 525, 535, 545,

(2) 616, 626, 636, 646.

Dacă însă un număr se termină cu 5, cubul său se divide cu 125 şi prin urmare nu poate avea terminaţiile de trei cifre din şirul (1).

De asemeni, cubul său se divide cu 8 şi prin urmare nu poate avea dintre terminaţiile de trei cifre din şirul (2) de cât pe 616. Cubul cerut este deci de forma $2\,b\,6\,d\,2616$.

Prin ipoteză, trebuind încă ca suma cifrelor cubului să fie $c^2 = 36$, rezultă că $b + d = 13$ şi prin urmare cubul cerut ar putea fi de forma

24692616, 25682616, 28652616, 29642616.

Extrăgând rădăcina cubică a acestor numere, sau căutând într'o tabelă de cuburi perfecte, găsim că numai numărul 28652616 este cub perfect,

$$28652616 = 306^3$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Au găsit soluţia d-nii: *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit., Timişoara), *Sasu Ion* (lic. Beiuş) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2071. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\sin(x - a) = \cos x - \cos a.$$

EUGEN WEGENER

Soluţie. Folosind formule de transformare cunoscute, ecuaţia dată devine

$$2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x-a}{2} = 2\sin\frac{a+x}{2}\sin\frac{a-x}{2},$$

sau

$$\sin\frac{x-a}{2}\left(\cos\frac{x-a}{2} + \sin\frac{a+x}{2}\right) = 0.$$

De aci deducem

(1) $$\sin\frac{x-a}{2} = 0,$$

sau

(2) $$\cos\frac{x-a}{2} + \sin\frac{a+x}{2} = 0.$$

Ecuaţia (1) rezolvată, de dă

$$\frac{x-a}{2} = k\pi,$$

deci

$$x = 2k\pi + a, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ecuaţia (2) se mai poate scri

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x-a}{2}\right) + \sin\frac{a+x}{2} = 0,$$

sau

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0.$$

De aci rezultă

$$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

deci

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

sau

$$x=\frac{(4k+3)\pi}{2},\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

Soluţiile cerute sunt deci

$$x=2k\pi+a \quad \text{şi} \quad x=\frac{(4k+3)\pi}{2},$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

Au rezolvat problema d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac I. C.* (Lt), *Creţa I. Gavril* (Polit, Timişoara), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Iacob Şt. Eugen* (Cpt), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Lucu I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Manolache Mircea*, *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mesch Iosef* (Timişoara), *Muţiu S. Antim* (lic. Beiuş), *Necula C. Ilie*, *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Pălăcianu D. Vasile* (lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (lic. Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Vişa Eugen* (Arad).

PROBLEME PROPUSE

2130. — Dacă N este un număr prim, atunci expresia

$$N^{28}-N^{16}-N^{12}+1$$

se divide prin numărul 38675.

CAP EUGEN ŞT. IACOB

2131. — Dintre soluţiile întregi ale ecuaţiei

$$z^2=x^2+y^2$$

să se aleagă acelea pentru care suma $x+y+z$ este un patrat perfect.

G-L GH. BUICLIU

2132. — Să se rezolve ecuaţia

$$x^4+4x^2-8x+6=0.$$

I. V. MATIES

2133. — Să se rezolve sistemele de ecuaţii

$$(1)\quad \begin{cases} 9x^2-4y^2+5=0 \\ 4(1-x-y)^2-x^2+7=0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y^2-4x^2=3 \\ 4(1-x-y)^2-9x^2=1. \end{cases}$$

Să se construiască curbele reprezentative şi apoi să se afle valorile apropiate ale rădăcinelor.

N. ABRAMESCU

2134. — Pe un semicerc de diametru A D luăm punctele B, C şi ducem coardele A B, B D, D C, C A. Cunoscând A D $=2a$, arc B C $=2\alpha$ şi arc C D $=2\beta$, se cere perimetrul patrulaterului concav A B D C, având ca laturi cele patru coarde duse.

Caz particular:

$a=1$ c. m, arc $\alpha=15^0$, arc $\beta=22^0,30'$.

V. ALACI

2135. — Fie A B un diametru al cercului O. Se duce pe acest diametru o perpendiculară variabilă, care taie cercul în M şi N.

Apoi, se uneşte M cu A şi fie P mijlocul coardei A M.

Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie al dreptei N P cu paralela la A B dusă prin M.

MIRCEA MANOLACHE

2136. — Să se arate că volumul unui tetraedru echifacial are expresia

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)S^2-(abc)^2},$$

unde a, b, c şi S reprezintă respectiv muchiile şi aria uneia din feţe.

EUGEN VISA

2137. — Se dă în triunghiul A B C, $\sphericalangle A=135^0$. Să se stabilească relaţia

$$b=\frac{\sqrt{2}\,c\,sp\,B\,sp\,(B+45^0)}{sp\,(B+135^0)}.$$

CPT. V. COSTACHESCU

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.

2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.

3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,

4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

5. Sub-Lt *Moisă I. Gheorghe.* Adresa: *Agripina Moisă,* Str. Ştefan cel Mare No. 242, Roman.

6. *Petre F. Ionescu.* Strada Severinului No. 76, Craiova.

7. *Ioan N. Gligor.* Aliuş, Jud. Timiş-Torontal.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim şi rugăm a nu ni se mai trimete, deocamdată, abonamente.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXII, cu preţul de lei 300 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXIII. IUNIE 1943 No. 4.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **Cpt. V. COSTACHESCU**: APLICATIUNI ALE TRIGONOMETRIEI PATRATICE.
2. **C. BORS**: ASUPRA UNUI GRUP TERNAR DE INVOLUTII PE O CONICA.
3. NOTE MATEMATICE 8, 9.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 938, 2061, 2069, 2083, 2089.
6. PROBLEME PROPUSE: 2138–2145.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 4 TIMISOARA, IUNIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

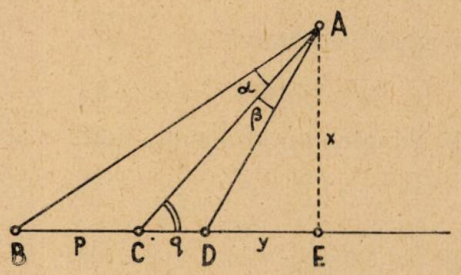
APLICAȚIUNI ALE TRIGONOMETRIEI PATRATICE

DE

Cpt. C V. COSTĂCHESCU

În Nicholls's Concise Guide to the Navigation examinations for master and extra master, este demonstrată la pagina 213, formula celor 3 relevmente (a three bearing formula)

$$\operatorname{cotg} C = \frac{p \operatorname{cotg} \alpha - q \operatorname{cotg} \beta}{p+q}.$$



Voiu demonstra această formulă cu ajutorul *Trigonometriei patratice*.

Din A scoborăm o perpendiculară pe dreapta B C și notăm A E = x, D E = y.

Aplicând o teoremă cunoscută a triunghiurilor dreptunghice A B E, A C E, A D E, avem:

$$(a) \qquad x = (x+y+q+p)\, sp\,(C-\alpha)$$
$$(b) \qquad x = (x+y+q)\, sp\, C.$$
$$(c) \qquad x = (x+y)\, sp\,(C+\beta).$$

De unde:

$$x = \left[\frac{x}{sp\, C} + p\right] sp\,(C-\alpha),$$

$$x = \left[\frac{x}{sp\,(C+\beta)} + q\right] sp\, C.$$

Eliminând pe x din ultimile două relații, obținem:

$$(d) \qquad \frac{p\, sp\,(C-\alpha)}{sp\, C - sp\,(C-\alpha)} = \frac{q\, sp\,(C+\beta)}{sp\,(C+\beta) - sp\, C}.$$

Dacă înlocuim valorile $sp\,(C-\alpha)$, $sp\, C$, $sp\,(C+\beta$ respectiv prin

$$\frac{\operatorname{tg} C - \alpha)}{1+\operatorname{tg}(C-\alpha)}, \quad \frac{\operatorname{tg} C}{1+\operatorname{tg} C}, \quad \frac{\operatorname{tg}(C+\beta)}{1+\operatorname{tg}(C+\beta)},$$

obținem formula pe care ne-am propus să o demonstrăm.

Plecând dela relația (d) și întrebuințând formulele 20 și 24 din *Trigonometria patratică*, avem:

$$\frac{p\,(sp\, C - sp\,\alpha)}{sp\,\alpha\,(1+2\,sp^2 C - 2\,sp\, C)} = \frac{q\,(sp\, C + sp\,\beta - 2\,sp\, C\, sp\,\beta)}{sp\,\beta\,(1-2\,sp\, C + 2\,sp^2 C)}$$

$$(e) \qquad \boxed{sp\, C = \frac{p+q}{\dfrac{p}{sp\,\alpha} + 2q - \dfrac{q}{sp\,\beta}}}.$$

Dacă notăm $\frac{p}{q} = a$, obținem relațiile:

$$Cp\, C = Cp\,\alpha + \frac{1 - Cp\,\alpha}{a+1} + \frac{1 - Cp\,\beta}{a+1},$$

$$\boxed{sp\, C = \frac{a+1}{a\, Cp\,\alpha + 2 - Cp\,\beta}}.$$

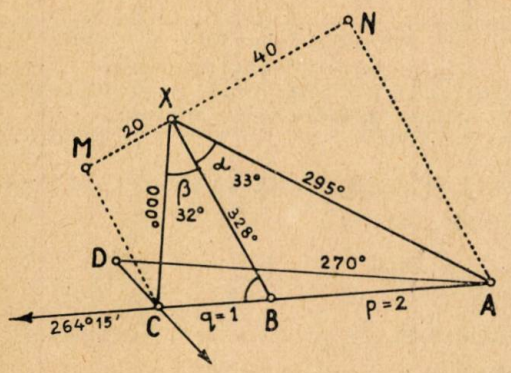
Aplicațiuni 1. *O navă merge în drum adevărat 270°, viteză 24 noduri. La un moment dat relevează un far* X *în relevment adevărat 295°. După 40 minute relevmentul este 328°, iar după încă 20^m relevmentul este 000°. În regiune există un curent a cărui direcție este 137°, viteză necunoscută.*

Se cere: drumul navei deasupra fundului și viteza curentului.

Din punctul X se trasează cele trei relevmente. Prin X se duce o dreaptă perpendiculară pe X B. Se iau segmentele X N și X M astfel ca

$$\frac{X\,N}{X\,M} = \frac{40^m}{20^m} = 2.$$

Din N şi M se duc paralele la relevmentul al doilea. Aceste drepte intersectează respectiv primul şi ultimul relevment în A şi C. Se uneşte A cu C.



A C este drumul deasupra fundului, drum rezultat din drumul ţinut la compas (D A = 270°) vit = 24 N^a şi viteza curentului. Din figură se observă că

$\sphericalangle$ A X B = 33° = α, $\sphericalangle$ B X C = β = 32°, $p = 2$, $q = 1$.

Aplicând formula (*e*), avem:

$$sp\,B = \frac{p+q}{\frac{p}{sp\,\alpha} + 2q - \frac{q}{sp\,\beta}} = 0{,}66487.$$

*** B = 63° 45′.

Drumul deasupra fundului va fi 328° — 63° 45′ = 264°. 15′. (Drumurile şi relevmentele în navigaţe se contează dela N în sens retro.)

Din figură se observă că A D este drumul şi distanţa parcursă (270°, 24 N^d), D C = direcţia curentului 137°, $\sphericalangle$ A = 5° 35′, $\sphericalangle$ D = 47°, $\sphericalangle$ C = 127° 15′, D C este viteza curentului pe oră. Din triunghiul A D C se deduce că D C = 3,02 Mile.

2. *O navă* A *merge în* D *a* = *Nord, viteză 12 noduri. La un moment dat relevează o navă* B *în* R*a* = 45°. ($\sphericalangle$ N A_0 B_0 = 45°). *După 10^m, relevmentul este 33° 45′, iar după încă 5^m, relevmentul adevărat este 28° 07′5. Viteza navei* B *este 15 noduri. Se cere drumul.*

Construim figura după datele problemei,

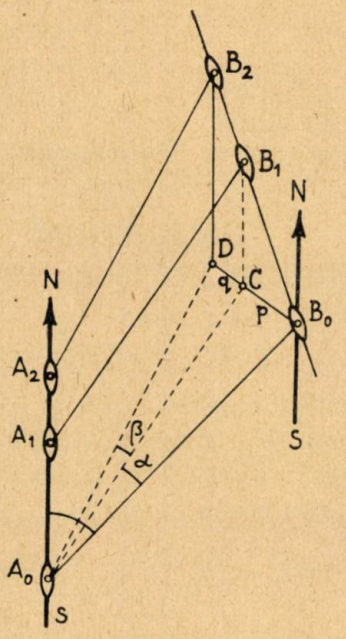
A A_1 = 2 Mile, A_1 A_2 = 1 = 1 Milă.

Din punctele A_0, A_1, A_2 ducem respectiv cele trei relevmente.

Presupunem că drumul navei B este B_0 B_2.

Considerăm pe A fix. B se va deplasa în raport cu A după dreapta B_0 D.

Din construcţie, figurile A_0 C B_1 A_1 şi A D B_2 A_2 sunt paralelograme.



Din figură se observă că

$\alpha = 11° 15'$, $\beta = 5° 37'5$;

$p = 10$ minute, $q = 5$ minute, deci

$$\frac{p}{q} = 2.$$

Aplicând formula cunoscută, avem:

$$sp\,\widehat{A_0\,C\,B_0} = \frac{p+q}{\frac{q}{sp\,\beta} + 2p - \frac{p}{sp\,\alpha}} = 0{,}98092,$$

deci

A_0 C B_0 = 88° 07′; A_0 B_0 C = 80° 38′

În triunghiul B_0 D B_2, D B_2 = A_0 A_2 = 3 Mile; B_0 B_2 = 3,75 Mile (distanţa parcursă de nava B în cele 15 minute)

$\sphericalangle B_2$ D B_0 = $\sphericalangle$ D B_0 S = 80° 38′ + 45° = 125° 38′.

Se poate calcula

$\sphericalangle$ D B_0 B_2 = 40° 33′ 36″,

deci

N B_0 B_2 = 180° — (40° 33′ 36″ + 125° 38′) = 13° 48′ 24″.

Drumul navei B este Nord 13° 48′ 24″ spre W.

Ambele exemple sunt din manualul amintit.

ASUPRA UNUI GRUP TERNAR DE INVOLUȚII PE O CONICĂ

DE

C. BORȘ.

Valorile parametrului t ale punctelor de intersecție ale unei conice (Σ)

$$x_i = a_i t^2 + b_i t + c_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

cu dreapta

$$\Sigma u_i x_i = 0 \tag{2}$$

sunt date [1] de ecuația de gradul al II-lea

$$t^2 \Sigma a_i u_i + t \Sigma b_i u_i + \Sigma c_i u_i = 0. \tag{3}$$

x_i și u_i fiind coordonatele omogene punctuale și tangențiale, iar a_i, b_i, c_i constante așa fel încât $\Delta = (a_i b_i c_i) \neq 0$.

O involuție J pe conica Σ este reprezentată prin forma biliniară

$$a t' t'' + b (t' + t'') + c = 0. \tag{4}$$

Coordonatele omogene ale centrului acestei involuții sunt date de

$$x_i = a c_i - b b_i + c a_i, \tag{5}$$

după cum rezultă din (3), impunându-i condiția ca să admită rădăcinile t' și t''. Se obține astfel ecuația tangențială a centrului involuției J.

Ecuația dreptei care unește două puncte corespunzătoare valorilor t' și t'' ale parametrului, este dată de (2), unde

$$u_i = \frac{k}{\Delta} [C_i t' t'' - B_i (t' + t'') + A_i], \tag{6}$$

în care $k = \Sigma a_i u_i$, $\Delta = (a_i b_i c_i)$ și A_i, B_i, C_i minorii algebrici ai elementelor a_i, b_i, c_i în Δ.

Valorile parametrului t pentru punctele duble ale involuției J sunt date de (4) făcând $t' = t''$, sau de ecuația

$$t^2 \Sigma C_i x_i^0 - 2t \Sigma B_i x_i^0 + \Sigma A_i x_i^0 = 0, \tag{7}$$

unde x_i^0 sunt date de (5).

Ecuația axului involuției — polara centrului — este dată de ecuațiile (2) și (6) în care t' și t'' sunt rădăcinile ecuației (4) pentru punctele duble ale involuției

$$\Sigma x_i (a A_i + 2 b B_i + c C_i) = 0. \tag{8}$$

1. *Condiția ca patru puncte pe o conică* Σ *să fie armonice,* este ca dreptele care le unesc să fie conjugate față de conică.

Dacă $\Sigma u_i' x_i = 0$, $\Sigma \bar{u}_i' x_i = 0$ sunt ecuațiile a două drepte oarecare și x_i', $\bar{x}_i'$ atunci coordonatele polilor acestor drepte față de conica Σ, punând condiția ca ecuațiile (3) și (7) să fie echivalente și luând factorul de proporționalitate egal cu 1, avem

$$\begin{aligned} \Sigma A_i x_i' &= \Sigma c_i u_i' \\ \Sigma B_i x_i' &= -\frac{1}{2} \Sigma b_i u_i' \\ \Sigma C_i x_i' &= \Sigma a_i u_i. \end{aligned} \tag{9}$$

Rezolvând acest sistem în raport cu x_i':

$$x_k' = \frac{\Delta_k}{D}, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

unde $D = \Delta^2$, este reciprocul lui Δ, iar Δ_k, folosind teorema lui *Iacobi* relativ la minorii determinanților reciproci, are valorile

$$\Delta_k = a_k \sum_i c_i u_i' - \frac{1}{2} b_k \Sigma b_i u_i' + c_k \Sigma a_i u_i'$$

Condiția ca dreptele să fie conjugate este $\Sigma \bar{u}_k' x_k' \equiv 0$ și aceasta devine — folosind pentru u_i' și $\bar{u}_i'$ relațiile (7) —

$$(t' + t'') (\bar{t}' + \bar{t}'') = 2 (t' t'' + \bar{t}' \bar{t}''). \tag{10}$$

Observații. a. Relația (10) arată că într'un sistem oarecare de coordonate pe conică $(t_\infty t_0 t_1)$, un punct oarecare (t) este dat de relația

$$t = (t_\infty \; t_0 \; t_1 \; t). \tag{11}$$

b. Cu ajutorul formulei (10) se poate determina perechea de puncte armonică cu două perechi de puncte pe o conică. Această pereche este formată din punctele de intersecție cu conica, a dreptei care unește polii dreptelor pe care se află cele două perechi de puncte date. Valorile parametrului t pentru perechea armonică comună sunt date de ecuația

---

[1]) *Aubert Papelier,* Ex. Géométrie analitique, tome II.

(12) $(\lambda - \bar{\lambda})t^2 - 2(\mu - \bar{\mu})t - (\lambda\bar{\mu} - \bar{\lambda}\mu) = 0,$

$\lambda = t' + t'', \ \bar{\lambda} = \bar{t}' + \bar{t}'', \quad \mu = t' t'', \ \bar{\mu} = \bar{t}' \bar{t}'',$

(t', t''), $(\bar{t}', \bar{t}'')$ fiind valorile parametrului t pentru cele două perechi de puncte date. Ecuația (12) permite discuția perechei armonice comune cu două perechi de puncte date.

2. *Condiția ca două involuții pe o conică să fie permutabile* este ca axele lor să fie conjugate, adică punctele lor duble să formeze o cuaternă armonică. Fie J' și J'' două involuții

(13) $$a' t' t'' + b'(t' + t'') + c' = 0,$$
$$a'' \bar{t}' \bar{t}'' + b''(\bar{t}' + \bar{t}'') + c'' = 0.$$

Condiția de armonie (10) devine

$$a' c'' + a'' c' = 2 b' b''.$$

3. *Involuția permutabilă cu două involuții pe o conică.*

Făcând în a doua din ecuațiile (13) $\bar{t}'' = t''$, produsul invotuțiilor J' și J'' este proectivitatea

$$(a' b'' - a'' b') t' \bar{t}' + (a' c'' - b' b'') t' +$$
$$(b' b'' - a'' c') \bar{t}' + b' c'' - b'' c' = 0.$$

Condiția ca aceasta să fie involutivă este $a' c'' + a'' c' = 2 b' b''$, adică involuțiile J' și J'' să fie permutabile. Involuția J''', permutabilă cu J' și J'' este

(15) $$(a' b'' - a'' b') t' \bar{t}' + \frac{a' c'' - a'' c'}{2}(t' + \bar{t}') +$$
$$b' c'' - b'' c' = 0$$

și punctele ei duble-armonice perechilor duble ale involuțiilor J' și J'' — sunt date de ecuația

(16) $(a' b'' - a'' b') t^2 + (a' c'' - a'' c') t + b' c'' - b'' c' = 0.$

Involuțiile J', J'', J''' formează un grup ternar. Punctele duble ale uneia oarecare dintre ele, separă armonic perechele de puncte duble ale celorlalte două. Centrele I', I'', I''' ale celor trei involuții, formează un triunghiu polar față de conică. Poziția acestui triunghiu față de conică, permite discuția grupului ternar de involuții: două dintre ele sunt iperbolice și a treia eliptică. În cazul când una dintre cele trei involuții este parabolică, triunghiul polar degenerează.

Considerând diferite poziții particulare ale triunghiului polar $I' I'' I'''$, se deduc proprietăți ale conicelor Σ, reprezentate parametric prin ecuațiile (1).

4. *Centrul conicei* Σ. Involuțiile J' și J'' sunt date de ecuațiile (13), ale căror coeficienți satisfac condiția de permutabilitate (14), iar involuția J''', permutabilă cu J' și J'', este dată de relația biliniară

$$a''' t' t'' + b'''(t' + t'') + c''' = 0,$$

unde — după (16) —

$$a''' = a' b'' - a'' b', \qquad 2 b''' = a' c'' - a'' c,$$
$$c''' = b' c'' - b'' c'.$$

Triunghiul polar $I' I'' I'''$ are un vârf eliptic — fie acesta I'''.

Particularizând pentru cazul când dreapta $I' I''$ devine dreapta improprie a planului, I''' devine centrul conicei Σ, iar axele involuțiilor J' și J'' devin două drepte de simetrie ale conicei (diametri conjugați). Ecuația dreptei $I' I''$ este dată de (2) și (6) în care t' și t'' (valorile parametrului pentru punctele duble ale involuției J'''), sunt rădăcinile ecuației

(17) $$a''' t^2 + 2 b''' t + c''' = 0.$$

Condițiile ca dreapta $I' I''$ să devine dreapta improprie a planului, sunt — după (8) —

$$A_i a''' + 2 B_i b''' + C_i c''' = \varepsilon_i \qquad \begin{matrix} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_2 = \dfrac{(a_i b_i c_i)}{a_3} \end{matrix}.$$

Acest sistem de ecuații al cărui determinant $2D = 2\Delta^2 \neq 0$, determină a''', b''', c'''

(18) $$a''' = 1, \quad b''' = \frac{b_3}{2 a_3}, \quad c''' = \frac{c_3}{a_3}.$$

Formula (5) dă coordonatele omogene ale centrului conicei Σ

(19) $$x_i''' = c_i - \frac{b_3}{2 a_3} b_i + \frac{c_3}{a_3} a_i.$$

Pentruca ecuația (1) să reprezinte o conică de gen eliptic, trebuește ca punctele duble ale involuției J''' să fie imaginar asociate. Din (17) și (18) rezultă condiția

$$b_3^2 - 4 a_3 c_3 < 0.$$

5. *Condiția ca ecuația* (1) *să reprezinte un cerc* este ca punctele duble ale involuției J''' să fie punctele ciclice ale planului. După (11) ecuația (17) dă

$$a_3 = c_3 = 1, \qquad b_3 = 0. \tag{20}$$

Punctele I' și I'' fiind improprii, rezultă

$$a' c_3 - b' b_3 + c' c_3 = 0, \quad a'' c_3 - b'' b_3 + c'' c_3 = 0.$$

Aceste relații, folosind condiția de permutabilitate (14) și valorile date de (20), devin

$$a' a'' = - b' b'' = c' c''. \tag{21}$$

Axele $I' I'''$ și $I'' I'''$ fiind ortogonale,

$$(C_1 c' + 2 B_1 b' + A_1 a')(C_1 c'' + 2 B_1 b'' + A_1 a'') +$$
$$(C_2 c' + 2 B_2 b' + A_2 a')(C_2 c'' + 2 B_2 b'' + A_2 a'') = 0.$$

Ducând in această condiție valorile minorilor algebrici

$$A_1 = b_2, \qquad A_2 = - b_1,$$
$$B_1 = C_2 - a_2, \qquad B_2 = a_1 - c_1,$$
$$C_1 = - b_2, \qquad C_2 = b_1$$

— aflate ținând seamă de (20) —, după (21) se obțin condițiile

$$(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 = b_1^2 + b_2^2,$$
$$b_1 (a_1 - c_1) + b_2 (a_2 - c_2) = 0.$$

Rezolvând acest sistem în raport cu $a_1 - c_1$ și $a_2 - c_2$,

$$b_1 = c_2 - a_2, \qquad b_2 = a_1 - c_1, \tag{22}$$
$$b_1 = a_2 - c_2, \qquad b_2 = c_1 - a_1.$$

Relațiile (20) și (22) sunt condițiile ca ecuația (1) să reprezinte un cerc. Ecuațiile parametrice generale ale cercului sunt

$$\begin{cases} x_1 = a_1 t^2 + (c_2 - a_2) t + c_1, \\ x_2 = a_2 t^2 + (a_1 - c_1) t + c_2, \\ x_3 = t^2 + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 t^2 + (a_2 - c_2) t + c_1, \\ x_2 = a_2 t^2 + (c_1 - a_1) t + c_2, \\ x_3 = t^2 + 1, \end{cases}$$

iar coordonatele omogene ale centrului cercului sunt date de (19) și (20)

$$x''' = a_i + c_i,$$

unde $a_3 = c_3 = 1$.

Conica (1) este de gen iperbolic, dacă punctele duble ale involuției J''' sunt reale, adică $b^2 - 4ac > 0$. În acest caz una dintre involuțiile J' și J'' este eliptică și axul ei va fi diametru transvers al iperbolei.

Punctele în care un diametru intersectează iperbola sunt armonice cu punctele dela infinit ale iperbolei.

6. *Condiția ca ecuația* (1) *să reprezinte o iperbolă echilateră.* În acest caz triunghiul polar $I' I'' I'''$ este autoasociat, axele involuțiilor J' și J'' fiind dreptele izotrope ale centrului conicei. Centrele involuțiilor J' și J'' sunt punctele ciclice ale planului

$$\begin{matrix} a' c_i - b' b_i + c' a_i = \varepsilon_i' \\ a'' c_i - b'' b_i + c'' a_i = \varepsilon_i'' \end{matrix}, \text{ unde } \begin{matrix} \varepsilon_1' = \varepsilon_1'' = 1, \\ \varepsilon_2' = -\varepsilon_2'' = i, \\ \varepsilon_3' = \varepsilon_3'' = 0, \end{matrix} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Rezolvând acest sistem de ecuații

$$a' = \frac{C_1 + i C_2}{\Delta}, \qquad a'' = \frac{C_1 - i C_2}{\Delta},$$

$$b' = - \frac{B_1 + i B_2}{\Delta}, \qquad b'' = - \frac{B_1 - i B_2}{\Delta}, \tag{23}$$

$$c' = \frac{A_1 + i A_2}{\Delta}, \qquad c'' = \frac{A_1 - i A_2}{\Delta}.$$

Condiția de permutabilitate (14) dă — folosind valorile date (23) — condiția ca ecuația (1) să reprezinte o iperbolă echilateră

$$A_1 C_1 + A_2 C_2 = B_1^2 + B_2^2.$$

7. *Condiția ca ecuația* (1) *să reprezinte un sistem de două drepte.* Scriind că centrul conicei se găsește pe curbă, din (1) și (19) se deduce

$$t^2 \left(\frac{b_3}{2 a_3} C_1 - B_1 \right) + t \left(\frac{c_3}{a_3} C_1 - A_1 \right) + \frac{c_3}{a_3} B_1 - \frac{b_3}{2 a_3} A_1 = 0.$$

$$t^2 \left(\frac{b_3}{2 a_3} C_2 - B_2 \right) + t \left(\frac{c_3}{a_3} C_2 - A_2 \right) + \frac{c_3}{a_3} B_3 - \frac{b_3}{2 a_3} A_2 = 0,$$

Eliminând parametrul t între aceste două ecuații după *Bézout* și dezvoltând determinantul de ordinul patru căpătat după regula lui *Laplace*, rezultă condiția de degenerare a ecuației (1),

$$(a_i b_i c_i) = 0.$$

NOTE MATEMATICE

8. — *Note din teoria numerelor.*

1. *Notând cu a şi b două numere întregi oarecari, pozitive sau negative, valorile numerice ale trinoamelor* a^2+ab+b^2 *şi* a^2-ab+b^2 *nu sunt divizibile cu 5, decât numai în cazul, prea evident, când a şi b sunt multipli de 5.*

Dăm o demonstraţie elementară a acestei proprietăţi cunoscute în vederea justificării proprietăţii enunţate mai jos (Consecinţa II).

Se vede imediat că, dacă numai unul din numerele a şi b este multiplu de 5, atunci trinoamele nu pot fi multipli de 5.

Rămâne deci să cercetăm cazul când nici a, nici b, nu se divide cu 5. În acest scop, constatăm mai întâi că pătratele nedivizibile cu 5 dau restul $+1$ sau -1. În adevăr, avem congruenţele

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned}(5m+1)^2&\equiv 1\\(5m+2)^2&\equiv -1\\(5m+3)^2&\equiv -1\\(5m+4)^2&\equiv 1\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 5).$$

Prin urmare, suma pătratelor a două numere de acest fel dă ca rest sau 0, sau $+2$, sau -2.

Când $a^2+b^2\equiv 0$, atunci $a^2\pm ab+b^2\equiv \pm ab\not\equiv 0$ (mod. 5), produsul ab nefiind divizibil cu 5 în cazul pe care-l cercetăm.

Când $a^2+b^2\equiv 2$, tabloul (1) ne arată că a şi b dau ca resturi 1 sau $4\equiv -1$, deci $ab\equiv 1$ sau -1, iar $a^2\pm ab+b^2\equiv 3$ sau 1.

Când $a^2+b^2\equiv -2$, atunci a şi b dau ca resturi 2 sau $3\equiv -2$, deci $ab\equiv 1$ sau -1, iar $a^2\pm ab+b^2\equiv -1$ sau -3.

Aşadară, divizibilitatea cu 5 este exclusă, oricum vom alege cele două numere, a şi b, nedivizibile.

Consecinţa I *Pentruca binomul* a^3+b^3 *(resp.* a^3-b^3*) să fie multiplu de 5, este necesar şi suficient ca* $a+b$ *(resp.* $a-b$*) să se dividă cu 5.*

Se verifică uşor prin descompunere în factori

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

Consecinţa II. *Pentruca forma ternară* $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ *să fie multiplu de 5 este necesar şi suficient ca numerele întregi x, y, z să dea, împărţite cu 5, acelaş rest.*

De asemenea, consecinţa II se verifică imediat ce înlocuim forma ternară dată cu echivalenta sa $(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$, care la rândul său se transformă în trinomul a^2+ab+b^2, dacă luăm $x-y=a$ şi $y-z=b$.

Pentru divizibilitatea cu 5, obţinem condiţiunile stabilite mai sus $a\equiv b\equiv 0$ (mod. 5), adecă $x\equiv y\equiv z$ (mod. 5).

2. *Notând cu a şi b două numere întregi, nedivizibile cu 7, constatăm că întotdeauna unul din cele 4 numere întregi*

$$a+b,\quad a-b,\quad a^2+ab+b^2,\quad a^2-ab+b^2$$

este divizibil cu 7, iar celelalte trei sunt nedivizibile cu acest număr.

Conform teoremei fundamentale a lui *Fermat*, $a^6\equiv 1$ şi $b^6\equiv 1$ (mod. 7), prin urmare $a^6-b^6\equiv 0$. Descompunând în factori membrul din stânga al ultimei congruenţe, obţinem

$$(a^3+b^3)(a^3-b^3)\equiv 0\ (\text{mod. } 7)$$

şi observăm că numai unul din aceşti factori este multiplu de 7, căci dacă ar fi amândoi, atunci şi suma (diferenţa) lor ar urma să fie multiplu de 7, ceeace este contrar condiţiilor date în enunţ.

Tratăm împreună cele două cazuri posibile, prin întrebuinţarea semnelor duble, rămânând simultan valabile fie cele superioare, fie cele inferioare.

Scriem

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=(a\pm b)[(a\pm b)^2\mp 3ab]$$

$$=d^3(a_1\pm b_1)[(a_1\pm b_1)^2\mp 3a_1b_1],$$

unde am notat cu d cel mai mare divizor comun al numerelor $a=da_1$ şi $b=db_1$.

Numerele a_1 şi b_1 fiind prime între ele, expresiile

$$a_1\pm b_1\quad\text{şi}\quad (a_1\pm b_1)^2\mp 3a_1b_1$$

nu admit ca divizor comun decât cel mult pe 3, deoarece $a_1\pm b_1$ este prim cu cu a_1b_1.

Prin urmare, numai una din expresiile $a\pm b$ şi $a^2\mp ab+b^2$ este multiplu de 7, căci, prin ipoteză, d nu poate admite ca divizor pe 7 c. c. t. d.

9. — *Asupra tangentelor lui Feuerbach.*

În „Gazeta Matematică", 1937—38, p. 319 s'a publicat rezolvarea următoarei probleme: *Fie* G *şi* I *centrul de greutate şi centrul unuia din cercurile tritangente laturilor unui triunghiu* A B C. *Să se demonstreze că transversala reciprocă a dreptei* I G *este tangentă la cercul celor nouă puncte (în punctul lui Feuerbach),* problema fiind propusă de D-l General *Gh. Buicliu* şi rezolvarea fiind datorită tot D-sale. La sfârşitul rezolvării D-l Gen. *G. Buicliu,* menţionează: „atât proprietatea directă cât şi cea reciprocă sunt prea frumoase pentru a fi necunoscute. E probabil ca anterior unii geometrii să se fi ocupat de ele. Ar fi interesant dacă s'ar găsi cine şi unde".

Găsim o menţiune despre această teoremă în „La géométrie du triangle" *Tr. Lalescu.* La pag. 35 avem enunţul: „transversala isotomică a lui *Feuerbach*" fără demonstraţie şi fără nici o indicaţie a autorului.

O demonstraţie elementară directă a acestei teoreme este următoarea: În $\Delta A B C$ fie A', A_1, H_1 picioarele medianei, bisectoarei şi înălţimei ce pleacă din A, iar D punctul de contact al lui B C cu cercul înscris; fie apoi M punctul de întâlnire al lui I G cu B C şi N isotomicul lui M, adică simetricul său faţă de A'.

Să stabilim mai întâi câteva formule preliminarii „Teorema bisectoarei" aplicată în $\Delta A B C$, ne dă:

$$(1) \qquad \frac{\overline{B A_1}}{c} = \frac{\overline{A_1 C}}{b} = \frac{a}{b+c},$$

a, b, c fiind lungimile laturilor şi sensul pozitiv al segmentelor orientate fiind dela B la C. Aplicând apoi teorema bisectoarei în $\Delta A A_1 B$, avem:

$$(2) \qquad \frac{\overline{I A}}{\overline{I A_1}} = \frac{c}{\overline{A_1 B}} = -\frac{b+c}{a}.$$

Avem mai departe

$$(3) \quad \overline{A_1 A'} = \overline{B A'} - \overline{B A_1} = \frac{a}{2} - \frac{a c}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)},$$

$$(4) \qquad \overline{B H_1} = c \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

şi se ştie că

$$(5) \qquad \overline{B D} = p - b = \frac{a-b+c}{2}.$$

Putem trece acum la demonstrarea teoremei în chestiune. Teorema lui *Menelaus* aplicată în $\Delta A A' A_1$ tăiat de transversala G I M, ne dă

$$\frac{\overline{M A'}}{\overline{M A_1}} \cdot \frac{\overline{I A_1}}{\overline{I A}} \cdot \frac{\overline{G A}}{\overline{G A'}} = 1$$

şi cum $\overline{G A} : \overline{G A'} = -2$, obţinem cu ajutorul lui (2)

$$\frac{\overline{M A'}}{\overline{M A_1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{I A}}{\overline{I A_1}} = \frac{b+c}{2a},$$

de unde deducem

$$\frac{\overline{M A'}}{\overline{M A'} - \overline{M A_1}} = \frac{\overline{M A'}}{\overline{A_1 A'}} = \frac{b+c}{b+c-2a}$$

şi cu ajutorul lui (3)

$$\overline{M A'} = \frac{a(b-c)}{2(b+c-2a)}.$$

Trecând la punctul N, avem:

$$(6) \qquad \overline{N A'} = \frac{a(c-b)}{2(b+c-2a)}.$$

Obţinem mai departe cu ajutorul relaţiilor (6), (5) şi (4)

$$\overline{N D} = \overline{N A'} + \overline{A' B} + \overline{B D} =$$

$$\frac{a(c-b)}{2(b+c-2a)} - \frac{a}{2} + \frac{a-b+c}{2} =$$

$$\frac{a(c-b)}{2(b+c-2a)} + \frac{c-b}{2} = \frac{(c-b)(b+c-a)}{2(b+c-2a)};$$

$$\overline{N H_1} = \overline{N A'} + \overline{A' B} + \overline{B H_1} =$$

$$\frac{a(c-b)}{2(b+c-2a)} - \frac{a}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} =$$

$$= \frac{a(c-b)}{2(b+c-2a)} + \frac{c^2-b^2}{2a} = \frac{(c-b)(a-b-c)^2}{2a(b+c-2a)}$$

şi se verifică uşor relaţia:

$$\overline{N D}^2 = \overline{N A'} \cdot \overline{N H_1},$$

adică punctul N are puteri egale faţă de cercul înscris şi faţă de cercul celor nouă puncte. Cum aceste cercuri sunt tangente în punctul φ al lui *Feuerbach,* punctul N se găseşte pe tangenta în φ la cele două cercuri, adică pe tangenta lui *Feuer-*

bach. Această tangentă şi dreapta I G tăind laturile triunghiului A B C în puncte isotomice, sunt transversale reciproce sau isotomice.

E. ARGHIRIADE

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XVIII, No. 9, Mai 1943. Rezultatul Concursului „*Gazetei Matematice*" din anul 1943, de *O. N. Ţino.* † Profesorul *Andrei Gr Ioachimescu* (urmare), de *Alexandru Stoenescu.* Aplicaţii ale geometriei la discuţia şi separarea rădăcinelor unei ecuaţii, de *N. Abramescu.* Asupra unei matrici din calculul vectorial de *V. Vâlcovici.* Raport pentru acordarea premiului de algebră, de *V. Alaci, Th. Angheluţă* şi *Al. Bunescu.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara,* Tome 11, Fasc. 1—2, 1943. La représentation analytique des polynômes et deux applications, par *D. Pompeiu.* Fonctions pseudo-homogènes et une nouvelle classe d'équations différentielles et aux dérivées partielles, par *V. Alaci.* Réflexions sur l'arithmétique de l'infini, par *D. Pompeiu.* Sur une proposition de *Cayley,* par *P. Sergescu.* Sur une équation fonctionelle, par *Michel Ghermanescu* Notes sur l'approchée représentation et construction de la série Φ_6. De quelques séries hyperboliques et exponentielles, de série ayant les nombres trancendants remarquables, par *Vincenzo G. Cavallaro.* Sur une équation fonctionnelle, par *Th. Anghelutza.* Sur la relation des origines de la géométrie cayleyenne et la géométrie sphérique, par *N. Abramescu.* Sur certains déterminants déduits de déterminant de *Wandermonde,* par *D. V. Ionescu.* Triangle et tétraèdre, par *V. Thébault.* Sur la courbe caractéristique d'une courbe plane ou gauche, par *E. Arghiriade.* Sur le tranchet *d'Archiméde,* par *V. Thébault.* Notes sur quelques questions techniques concernant les bouches à feu, par Comandeur Dr. Ing. *I. Linteş.* Sur le mouvement tautochrone plan, par *Radu Badescu.* Leistungsbedarf beim elektrischen Widerstandschweissen, von Dr. Ing. *Remus Raduleţ.* Elektrische Fehlerströme an feuchten Wänden, von Dr. Ing. *Remus Raduleţ.* Turaţiile maxime şi minime posibile în cazul unei staţiuni pompare date, de Dr. Ing. *A. Bărglazan.* Consideraţiuni asupra unor rotori Francis realizaţi şi încercaţi, de Dr. Ing. *A. Bărglazan.* Die Oxydation rumänischer Handelsbenzine, von Dr. Ing. *C. Cândea* und *N. Cristodulo.* Hydrierung von Erdölrückständen, von Dr. Ing. *C. Cândea* und Dr. *L I. Sauciuc.* Über die Einordnung des Begriffes der Aktivität in die Thermodynamik der Lösungen, von *I. G. Murgulescu.* Die Analyse der Erdalkalihydrocarbonathaltigen Mineralwassers von Bencek (Banat), von *C. Drăgulescu.* Comptes-rendus des séances de la Société Scientifique de L'école Polytechnique de Timişoara.

3. *M. Ghermanescu.* Probleme şi propozitii din *Dinamica punctului.*

Este o interesantă Culegere de 185 pagini (litografiat), format mare, ce cuprinde 590 probleme şi propoziţii repartizate în următoarele 7 capitole: *Mişcarea rectilinie; Forţe paralele; Forţe centrale; Mişcarea plană; Mişcarea în spaţiu; Mişcarea pe o curbă; Mişcarea pe o suprafaţă.* Urmează apoi pe scurt soluţiile problemelor enunţate, ceeace permite cetitorilor a lucra şi a controla rezultatele.

Autorul şi-a dat osteneala să adune problemele şi propoziţiile cele mai variate şi mai caracteristice, (multe fiind originale), care pot rodi întregul domeniul al Dinamicei punctului, iar în întroducere promite să scoată alte trei volume analoage care să cuprindă: *Statica, Cinematica* şi *Dinamica sistemelor.*

Adânc încredinţat de importanţa lucrării d-lui Prof. *Ghermănescu* şi de faptul că ea este de un real folos studenţilor de la Politehnică şi Universitate, o recomandăm cu toată căldura.

4. *Vincenzo G. Cavalaro.* Notes sur L'Approchée représentation et construction de la série Φ_6. De quelques séries hyperboliques et exponentielles de séries ayant les nombres Euleriens et Bernoulliens de nombres transcedants remarquables.

5. *V. Thébault.* Triangle et tétraèdre.

6 *Petre Sergescu.* Despre Valoarea Etică a Stiinţei- (Lecţiune de deschidere a Cursurilor Facultăţii de Stiinţe din Cluj, la Timişoara, la 8 Noembrie 1942.)

7. *Petre Sergescu.* Extensiunea Universitară din Cluj în Banat.

8. *O. Onicescu. D. Pompeiu* (Mathematica, Vol. XIX 1943).

9. Ing. *Aurel Bărglazan.* Câmpul hidrod namic (1934).

10. Ing *Aurel Bărglazan.* Contribuţiuni la determinarea numărului paletelor unei turbine (1935).

11. Ing. *Aurel Bărglazan.* Măsurarea debitelor mici prin strangularea secţiunii de scurgere (1936).

12. Ing. *Aurel Bărglazan.* Influenţa numărului paletelor asupra sarcinei de refulare la o pompă centrifugală (1939).

13. Ing. *Aurel Bărglazan.* Transformatorul hidrodinamic (1940, Teză).

14. Dr. Ing. *Aurel Bărglazan.* Turaţlile maxime şi minime posibile în cazul unei staţiuni de pompare date (1943).

15 Dr. Ing. *Aurel Bărglazan.* Consideraţiuni asupra unor rotori Francis realizaţi şi încercaţi.

16. Dr. Ing. *Ştefan Nadaşan.* Introduccre în calculul îmbinărilor sudate (1942).

17. Dr. Ing *Remus Răduleţ.* Elektrische Fehlerströme an feuchten Wänden.

18. Dr. Ing. *Remus Răduleţ.* Leistungsbedarf beim elektrischen Widerstandsschweissen (1943).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 938. — *Fie* AA_1, BB_1, CC_1 *cele trei mediane în triunghiul* A B C, *iar* A_2, B_2, C_2 *mijloacele lor. Să se arate că prelungind pe* AB_2, BC_2, CA_2 *până ce întâlnesc laturile triunghiului* A B C *în* A', B', C', *se formează un triunghiu cu o arie de trei ori mai mică de cât a lui* A B C *şi* A' B', B' C', C' A' *sunt respectiv paralele cu* BB_1, CC_1, AA_1, *iar punctul de întâlnire al medianelor triunghiului* A B C *este acelaşi şi în triunghiul* A' B' C'.

N. N. VELICESCU

1°. Fie P intersecția lui B C cu paralela din B_1 la A A'. Avem evident

$$\overline{A'P} = \overline{PC}.$$

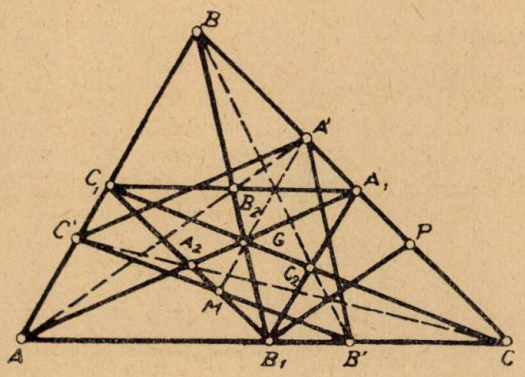
Din aceste construcții rezultă că A' este mijlocul lui B P și deci

$$B A' = A' P = P C$$

$$B A' = \frac{B C}{3}.$$

Analog

$$A C' = \frac{A B}{3} \quad \text{și} \quad C B' = \frac{A C}{3}.$$



Fie a, b, c, S laturile și suprafața triunghiului ABC; S' suprafața triunghiului A' B' C'; S_a, S_b, S_c suprafețele triunghiurilor A B' C', B A' C', C B' A'. Avem, ținând seamă de figură și de relațiile precedente

$$S_a = A B' \cdot A C' \frac{\sin A}{2} = \frac{2 b c}{9} \frac{\sin A}{2} = \frac{2 S}{9},$$

$$S_a = S_b = S_c = \frac{2 S}{9}$$

Apoi

$$S' = S - (S_a + S_b + S_c) = S - \frac{2 S}{3} = \frac{S}{3}.$$

2°. Dela 1° rezultă

$$B A' = \frac{B C}{3}; \quad B_1 B' = \frac{A C}{2} - B' C = \frac{A C}{2} - \frac{A C}{3} = \frac{C B_1}{3},$$

care arată că

$$\frac{B A'}{B_1 B'} = \frac{B C}{B_1 C},$$

deci A' B' este paralelă cu $B B_1$.

3°. Este un caz particular al teoremei lui *Pappus: Dacă* A', B', C' *împart laturile triunghiului* A B C *în același raport și în același senz, atunci triunghiurile* A B C *și* A' B' C' *au același centru de greutate.*

Bune soluții analoage s-au primit de la *Dumitrescu A. Elena, Bâcicov B., Bâcicov P. V., Mihăileanu N. N., Păsculescu M. V., Pop I. L., Rusu D. C., Purdilă A., Süli A. M* și *Vonica C. I.*

Problema se demonstrează la fel și are proprietăți analoage când A_2, B_2, C_2 împart medianele, plecând de la vârfuri în același raport așa încât

$$\frac{A A_1}{A A_2} = \frac{B B_1}{B B_2} = \frac{C C_1}{C C_1} = k.$$

În acest caz suprafața triunghiului A' B' C' este dată de relația

$$S' = \frac{4 k^2 - 10 k + 7}{(2 k - 1)^2}.$$

G-l Gh. B

Problema 2061. — *Să se afle limita expresiei*

$$y = \frac{1 + \cos x - n^2 \cos^{n-1} x + (2 n^2 - 2 n - 1) \cos^n x - (n-1)^2 \cos^{n+1} x}{(1 - \cos x)^3}$$

pentru $x = 0$. *Interpretare.*

ADRIAN I. POPESCU

Soluție. Pentru $x = 0$, y ia forma $\frac{0}{0}$, deci aplicăm regula lui *L'Hôpital* și avem după ce simplificăm prin $\sin x$:

$$\lim_{x=0} y = \left| \frac{-1 + n^2 (n-1) \cos^{n-2} x - n (2 n^2 - 2 n - 1) \cos^{n-1} x + (n+1)(n-1)^2 \cos^n x}{3 (1 - \cos x)^2} \right|_{x=0}.$$

Membrul al 2-lea, pentru $x = 0$, devinind de forma $\frac{0}{0}$, aplicăm iar regula lui *L'Hôpital* și avem după ce simplificăm prin x:

$$\lim_{x=0} y = \left| \frac{-n^2 (n-1)(n-2) \cos^{n-3} x + n (n-1)(2 n^2 - 2 n - 1) \cos^{n-2} x - n (n+1)(n-1)^2 \cos^{n-1} x}{6 (1 - \cos x)} \right|_{x=0}.$$

Cum membrul al 2-lea ia tot forma $\frac{0}{0}$ pentru $x=0$, aplicăm încă odată regula lui *L'Hôpital* şi obţinem după ce simplificăm prin sin x:

$$\lim_{x=0} y = \left| \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1)(n-2)(2n^2-2n-1)\cos^{n-3}x + n(n+1)(n-1)^3\cos x^{n-2}}{6} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1)(n-2)(2n^2-2n-1) + n(n+1)(n-1)^3}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)[n(n-2)(n-3) - (n-2)(2n^2-2n-1) + (n+1)(n-1)^2]}{6}.$$

Efectuând calculele din paranteza mare, găsim

$$\lim_{x=0} y = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Interpretare. Se observă că $\lim y$ este tocmai valoarea sumei

$$S = 1^2 + 2^2\cos x + 3^2\cos^2 x + \cdots + (n-1)^2\cos^{n-2} x,$$

pentru $x=0$.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Stefănescu Marin* (Lt, Brăile), *Ţigănoiu I. Alexandru* (Brăila) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2069. — *Să se stabilească relaţia:*

$$\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2}(C_n^1)^2 + \frac{n-2}{3}(C_n^2)^2 + \frac{n-3}{4}(C_n^3)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2 = \frac{n}{n+1}C_{2n}^n.$$

ION RIZESCU

Soluţie. Observăm că

$$\frac{n-k}{k+1}(C_n^k)^2 = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}C_n^k =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}C_n^k,$$

sau

$$\frac{n-k}{k+1}(C_n^k)^2 = C_n^k C_n^{k+1}.$$

Pentru $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, obţinem un şir de egalităţi, care adunate ne dau

$$(1)\qquad \frac{n}{1} + \frac{n-1}{2}(C_n^1)^2 + \frac{n-2}{3}(C_n^2)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2 = C_n^0 C_n^1 + C_n^1 C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} C_n^n.$$

De altă parte considerând dezvoltarea cunoscută,

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(1+x)^n =$$

$$(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n)$$

şi egalând coeficienţii lui x^{n-1} din primul şi ultimul membru, avem

$$C_{2n}^{n-1} = C_n^0 C_n^1 + C_n^1 C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} C_n^n,$$

astfel că egalitatea (1) devine

$$\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2}(C_n^1)^2 + \frac{n-2}{3}(C_n^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2$$

$$= C_{2n}^{n-1} = \frac{n}{n+1}C_{2n}^n,$$

fiindcă,

$$C_{2n}^{n-1} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-1)!} =$$

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)(n+1)}{(n-1)!\,n} = \frac{n}{n+1}C_{2n}^n.$$

Astfel relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt), *Enăchescu Ion* (lic. Nilit., Timişoara), *Kinsky Ioan* (Timişoara) şi *Mahrenholz Johannes* (Cottbus).

Soluţia autorului. Plecăm de la

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$$

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \cdots + C_n^n$$

Integrăm prima relaţie de la 0 la x şi derivăm pe cea de a 2-a, avem

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} C_n^1 + \frac{x^3}{3} C_n^2 + \frac{x^4}{4} C_n^3 + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} C_n^n,$$

$$n(x+1)^{n-1} = n x^{n-1} + (n-1) C_n^1 x^{n-2} + (n-2) C_n^2 x^{n-3} + \cdots + C_n^{n-1}.$$

Înmulţim aceste două relaţiuni şi scrim în membrul al 2-lea termenul de gradul n, avem

$$\frac{n}{n+1}(x+1)^{2n} = \cdots + \left[\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2}(C_n^1)^2 + \frac{n-2}{3}(C_n^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2\right] x^n + \cdots,$$

sau

$$\frac{n}{n+1}(x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + \cdots + C_{2n}^n x^n + \cdots) = \cdots \left[\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2}(C_n^1)^2 + \frac{n-2}{3}(C_n^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2\right] x^n + \cdots$$

şi identificând coeficienţii termenilor de gradul n din ambii membri, obţinem

$$\frac{n}{1} + \frac{n-1}{2}(C_n^1)^2 + \cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2 = \frac{n}{n+1} C_{2n}^n,$$

tocmai relaţia cerută.

Problema 2083. — *Să se arate că*

$$(S_3 - S_1)(S_4 + 5S_2) = (S_4 - S_2)(S_3 + 4S_1),$$

unde

$$S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Punem întâi relaţia cerută sub o altă formă şi aplicăm apoi o proprietate cunoscută a proporţiilor, avem:

$$\frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_2} = \frac{S_3 + 4S_1}{S_4 + 5S_2} = \frac{S_3 + 4S_1 - S_3 + S_1}{S_4 + 5S_2 - S_4 + S_2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

A stabili relaţia dată, revine a stabili relaţia

$$\frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

Sumele S_1, S_2, S_3, S_4 sunt însă cunoscute, astfel

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2, \tag{2}$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{3n^2+3n-1}{5} \cdot S_2,$$

(Curs de Algebră Superioară de *Th. Angheluţă*, p. 37).

Astfel fiind, primul membru din (1) în virtutea relaţiilor (2), se poate scri succesiv:

$$\frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_2} = \frac{S_1^2 - S_1}{\frac{3n^2+3n-1}{5} S_2 - S_2} =$$

$$\frac{5(S_1-1)}{(3n^2+3n-6)} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{5\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right]}{3(n^2+n-2)} \cdot \frac{S_1}{S_2} =$$

$$\frac{5(n^2+n-2)}{6(n^2+n-2)} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

Relaţia (1), deci şi cea cerută, este în acest fel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (lic. Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Bordaşiu I. Nicolae* (Beiuş), *Chiriac C.* (Lt), *Colesnic I. D-tru* (Polit., Timişoara), *Deme T. Gheorghe* (Beiuş), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Georgescu C. Nicolin* (Polit., Timişoara), *Godea Ioan* (lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (lic. Beiuş), *Iacob Eugen* (Cpt.), *Ieşan Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (lic. Beiuş), *Pat I. Moise* (lic. Beiuş), *Pălăceanu Vasile* (lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (lic. Beiuş), *Wegener Eugen* (Bucureşti) şi *Wigh Jean* (lic. Titu Maiorescu, Bucureşti).

Problema 2089 — *Într'un triunghiu oarecare* A B C, *avem relaţia*

$$(\sec A - 1)(\sec B - 1)(\sec C - 1) = 2r \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B}{a+b+c}.$$

EUGEN I. SIPOS

Soluţie. Folosind formule cunoscute şi notând cu E primul membru putem scri succesiv:

$$E = \frac{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)}{\cos A \cos B \cos C} =$$

$$\frac{8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{\cos A \cos B \cos C}.$$

Înmulțind ambii termeni din membrul al 2-lea cu $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, mai putem scri

$$(1)\quad E=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\,2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B\cos C}\times$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\times$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Ținând seamă că

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C,$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p}=\frac{2r}{a+b+c}$$

(Complément de Trigonométrie par „F. G. M", p. 69 și p. 176), relația (1) devine

$$E=2r\,\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{a+b+c},$$

tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Boris V. Bosie, Bordașiu I. Nicolae* (Beiuș), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timișoara), *Godea Ioan* (lic. Beiuș), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mureșiu Antim* (lic. Beiuș) și *Wegener Eugen* (București).

PROBLEME PROPUSE

2138. — Să se găsească patru numere întregi consecutive, știind că produsul a trei din ele este egal cu al patrulea urmat de zeruri.

G-L GH. BUICLIU

2139. — Să se rezolve în numere întregi și pozitive ecuația

$$x+2y+3z(1+\sqrt{7})^2=31+6\sqrt{7}.$$

CAP EUGEN ȘT. IACOB

2140. — Se pot determina întregii pozitivi p și q astfel ca ecuația

$$x^3-3(p+q)x^2+2(3p^2+3q^2-3p-3q+1)x+$$
$$4p^3+4q^3-6p^2-6q^2+2p+2q=0$$

să aibă o rădăcină întreagă?

M. GHERMANESCU

2141. — Să se determine q astfel ca expresiunea

$$E(x)=\frac{nx^{p+1}-(n+1)x^p+(p-n)x+1-p+n}{(x-1)^p},$$

să aibă o limită finită pentru $x=1$, n, p și q fiind întregi și pozitivi. Discuție.

I. V. MATIES

2142. — Fie AB o coardă fixă a unui cerc dat, M un punct variabil al acestui cerc și P punctul care împarte pe AM într'un raport dat. Perpendiculara din P pe BM o taie în Q. Să se afle locul punctului Q. Caz particular când P este mijlocul lui AM.

Se cere și o soluție geometrică.

N. ABRAMESCU

2143. — O dreaptă PQ de lungime constantă d se reazămă pe laturile OA și OB ale unghiului $AOB=2\alpha$, P fiind pe OA și Q pe OB. Din P și Q se duc perpendiculare respectiv pe OQ și OP, care se intersectează în M.

Să se arate că $\overline{OM}$=constant, când PQ variază ca poziție. Soluție analitică și trigonometrică.

LT. MARIN ȘTEFANESCU

2144. — Pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghic ABC, în care $AB=AC=1$, se i-au pe rând punctele D, E, F astfel ca $\sphericalangle BAD=\sphericalangle EAF$ și se notează $BD=x$, $BE=y$, $BF=z$.

Se cere să se stabilească relația

$$z=\frac{x+y-xy\sqrt{2}}{1-xy}.$$

V. ALACI

2145. — Să se arate că într'un tringhiu oarecare ABC raportul

$$\frac{r_a^2\,r_b^2\,r_c^2}{abc\,h_a\,h_b\,h_c\prod\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}.$$

este constant, notațiile fiind cele obicinuite.

EUGEN I. SIPOS

FACULTATEA DE ŞTIINŢE CLUJ-TIMIŞOARA

PROGRAMUL
săptămânii matematice (1—5 Iunie 1943).

1 Iunie, orele 10.

Prof. TH. ANGHELUŢĂ : Asupra unei desvoltări a unei funcţii analitice.

Prof. V. ALACI : Soluţia unui sistem funcţional. Asupra unor ecuaţii funcţionale.

Dra ILEANA MANG : Mediile funcţiilor de variabilă reală (referat)

orele 17.

Dra ANA CHECIAN : Asupra unei ecuaţii a lui Halphen (referat).

Dr. V. NOVACU : Introducere matematică la Mecanica ondulatorie a lui Schrödinger (I).

2 Iunie, orele 10.

Prof. G. IUGA : O problemă de Analiză nedeterminată.

Prof N. ABRAMESCU : Asupra unei clase de curbe care generalizează conicele omofocale.

Prof. M. GHERMĂNESCU : O clasă de ecuaţii funcţionale.

orele 17.

Dra MARIA BĂNĂRESCU : Asupra unei teoreme a lui Abel (referat).

Dr. V. NOVACU : Introducere matematică la Mecanica ondulatorie a lui Schrödinger (II).

4 Iunie, orele 10.

Prof P. SERGESCU . Despre învăţământul astronomic la Cracovia înainte de Copernic.

Prof. G. CĂLUGĂREANU : Singularităţile funcţiilor analitice uniforme şi polinoamele lui Tschebitcheff.

Dra CLARA BOILĂ : Determinanţi antisimetrici (referat).

orele 17.

Conf. E. ARGHIDIADE : O clasă de curbe.

Asist. N. GHIRCOIAŞIU : Asupra generalizării unor identităţi ale lui Euler

Dr. V. NOVACU : Introducere matematică la Mecanica ondulatorie (III).

5 Iunie, orele 10.

Prof. O. N. ŢINO : Contribuţii la rezolvarea în numerar întregi a ecuaţiei omogene de gradul al treilea.

Prof. D. V IONESCU : Ecuaţii funcţionale şi centrele de greutate la triunghiu şi tetraedru.

Aplicaţii ale Geometriei masselor la demonstrarea câtorva teoreme asupra tetraedrului.
O problemă a lui Hermite şi o teoremă asupra formelor quadratice.

Prof. C PÂRVULESCU : Caracteristici statistice „distilate" din notele şcolare.

Meteoritul dela Sopot.

Frecvenţa spiralelor în galaxiile multiple, duble sau simple.

Dr. M. DRĂGANU : Despre calculul simbolic.

Conf. C. IACOB : Aplicaţiile metodei lui Signorini la rezolvarea unor probleme de Hidrodinamică.

Prof. M. GHERMĂNESCU : Asupra unui sistem de ecuaţii funcţionale.

Este de relevat importanţa acestei săptămâni matematice, în care s-au expus comunicări originale şi referate.

Această săptămână matematică, ce are loc anual, este plină de farmec ştiinţific şi totdauna este aşteptată cu nerăbdare şi interes, fiind că ea dă impuls de activitate pentru noui lucrări originale şi strînge legăturile între profesori. De pe acum putem afirma că astfel de lucrări vor apărea şi anul acesta.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Anton Ioan, (P; 1949, 1982, 2017, 2023, 2031, 2039. 2063, 2095, 2097, 2105, 2107, 2110, 2114, 2115, 2120, 20124, 2135); **Barbu Virgil,** (2023, 2115, 2116, 2118, 2120. 2121, 2122, 2124, 2127. 2129); **Boris V. Bosie,** (1946. 1947, 1969, 2087); **Creţa F. Gavril,** (1758, 2002, 2011, 2015, 2017, 2035, 2047, 2063, 2125, 2116, 2120. 2125); **Constantinescu N. Ilie,** (P; 2120, 2123); **Enăchescu Gr. Ion,** (1679, 1698, 1833, 1835, 1934, 1974, 2005, 2023, 2052, 2054, 2061, 2067, 2068, 2092, 2093, 2107, 2112, 2115, 2120, 2121); **Gloden A.,** (N; 2129); **Knopf Hermann,** (P; 2025, 2028, 2031, 2034, 2106); **Iacob Eugen,** (N; P; 1923, 1964, 2097, 2098, 2115, 2120); **Ieşan Alexandru,** (2023, 2120, 2123, 2124, 2130, 2134); **Ionescu C. Victor,** (2135); **Maliţa Mircea,** (N; 2023, 2115, 2121. 2124); **Moisescu Pavel,** (N;) **Mahrenholz Johannes,** (N; 2023, 2101, 2108, 2109, 2113, 2115, 2116, 2117, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2129); **Miclea Nicolae,** (2023, 2134); **Moessner Alfred,** (N.); **Păläceanu D. Vasile,** (N; 1685, 1688. 1698, 1706, 1718, 1744, 1763, 1771, 1844, 1850 2027, 2054, 2100, 2124, 2125); **Petrovici B. Adalbert,** (2018, 2050, 2052); **Şipoş I. Eugen,** (2002, 2009, 2025, 2034, 2052, 2073, 2094, 2097, 2113, 2124, 2115, 2121, 2124); **Soare Mircea,** (2045, 2057, 2086); **Wegener Eugen,** (P; 1385, 1405, 1413, 1454, 1472, 1474, 1490, 1536, 1836, 1554, 1560, 1583, 1782, 1829, 1830, 1982, 2093, 2096, 2106, 2135); **Wigh Jean,** (2106).

ANUL XXIII. IULIE 1943 No. 5.

BIBLIOTECA ... ACADEMIEI ... SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **PETRE SERGESCU**: SCOALA ASTRONOMICA DIN CRACOVIA IN VEACUL AL XV-LEA
2. **I. STAMATE**: O PROBLEMA DE APLICATII GEOMETRICE ALE ANALIZE MATEMATICE.
3. NOTE MATEMATICE 10, 11,
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1782, 1825, 1923.
6. PROBLEME PROPUSE: 2146–2153.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 5 TIMISOARA, IULIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

ȘCOALA ASTRONOMICĂ DIN CRACOVIA ÎN VEACUL AL XV-LEA

DE

PETRE SERGESCU.

(Comunicare făcută la „Săptămâna Matematică" a Universității din Cluj, care a avut loc în Iunie 1943 la Timișoara).

Intemeerea Universității din Paris în veacul al XIII-lea a avut urmări deosebit de însemnate pentru renașterea studiilor științifice. La Paris s'au studiat cu deamănuntul și promovat operele lui *Aristotel* și ale continuatorilor și comentatorilor săi. Scolastica pariziană a creat tiparele *gândirii* științifice care trebuiau să fructifice *faptele* științifice, a căror cercetare rămăsese mai cu seamă în tradiția universităților italiene. Imbinarea celor două tendințe în gândirea genială a lui *Leonardo da Vinci* și, mai ales *Galileu* a dat naștere Renașterii științifice din veacul al XVI-lea și al XVII-lea din toată Europa.

Intre timp, elevii Sorbonei au dus în diferite colțuri ale Europei lumina câștigată de la maeștrii lor, creând Universități asemănătoare celei pariziene, în marile centre ca Praga, Cracovia, Viena, etc. Invățământul științific ajunsese la apogeu la Paris în veacul al XIV-lea. O pleiadă de învățați ca *Ioan Buridan, Albert din Saxa, Grigore din Rimini, Nicole Oresme,* isbutesc atunci să precizeze noțiunile de infinit în act și devenire, limită, etc., să unifice cauzele mișcărilor astrelor cu ale corpurilor pământești, să întrevadă întrebuințarea coordonatelor, sau ipoteza mișcării pământului. Dar, după această perioadă de creație strălucită, Sorbona trece printr'o epocă de oboseală în veacul al XV-lea. Ridicarea științei reîncepe în diferite centre din Italia, Germania și Franța abia în veacul al XVI-lea.

Intervalul de timp dintre crepusculul școalei nominaliste pariziene și renașterea puternică din veacul al XVI-lea prezintă ca focar luminos de învățământ științific Polonia și, mai ales, cunoscuta „școală astronomică din Cracovia".

Universitatea din Cracovia a fost întemeiată în 1364 de Regele *Casimir cel Mare*. Incă înainte de aceasta, Polonezii au dat câțiva învățați cunoscuți din Evul Mediu, elevi ai Sorbonei. Astfel a fost *Witelo,* născut către 1230, care scrie în 1270—78 o *Perspectiva,* în care studiază fenomenele fizice meteorologice datorite luminei. In această lucrare, *Witelo,* întrebuințează material științific din antichitate până la contimporanii săi *(Alhazen, Aristotel, Euclid, Ptolemeu, Roger Bacon, Albert cel Mare)* dar aduce și considerații originale. El era unul din puținii învățați ai evului mediu cari cunoștea secțiunile conice și concoida. A mai scris două opere, pierdute azi, o geometrie *De elementalis conclusionibus* și o astronomie *Scientia motuum coelestium*. Contimporan cu el, un *Francon din Polonia* scrie la Paris, în 1284, un *Torquetum*. Aceluiaș *Francon* i se datorește o *critică a Tablelor din Toledo*. (Table astronomice construite în conformitate cu teoria lui *Ptolemeu).*

Venirea dinastiei maghiare în Polonia face ca Universitatea din Cracovia să decadă repede, așa că regele *Wladislaw Jagello* și soția sa *Hedwiga* trebue să o reorganizeze la 1400. Din acest moment, începe o epocă de înflorire a studiilor științifice la Cracovia. Către 1440 se crează acolo *prima catedră de astronomie* din toată Europa Centrală (grație generozității unui burghez cracovian *Stobner).* Unul dintre primii

titulari ai acestei catedre, *Martin Krol din Zurawica,* astronom foarte cunoscut pe vremea lui, mort în vârstă de abia vreo 40 de ani în 1459, întemeiază prin testament, *a doua catedră de ştiinţe exacte* (astrologie) la Cracovia. Aceste două catedre au creat o atmosferă ştiinţifică foarte ridicată, ceea ce a dat naştere aşa numitei „Şcoale Astronomice din Cracovia". Timp de mai multe decenii, numeroşi Polonezi au fost chemaţi ca profesori de astronomie în Universităţi străine, sau ca astrologi la curţi de Papi, Regi sau Episcopi străini Tineri străini, viitori reformatori ai învăţământului ştiinţific din Germania, şi-au făcut pe atunci studiile la Cracovia. E drept că în jumătatea a doua a veacului al XV-lea, Universitatea din Cracovia avea până la *şase cursuri ştiinţifice diferite* în fiecare semestru, pe când alte universităţi contimporane nu aveau nici unul. Primele catedre de ştiinţele exacte de la Universităţile Germane au fost: la Ingolstadt în 1492, la Viena în 1500. Prestigiul de care se bucurau învăţaţii din Cracovia se poate deduce şi din faptul următor. Unul din primele decrete ale Regelui *Sigismund I cel Bătrân.* (Soţul *Bonei Sforza),* dat prin 1506, prevede că oricine este numit profesor titular la Universitate, devine, prin aceasta chiar, nobil. (Cracovia era atunci capitala Poloniei).

Martin Król din Zurawica a compus în 1445 un *Algorismus minutiarum,* urmat de un *Tractatus proportionum* şi de o *Geometria practica.* După o lungă călătorie în străinătate, el devine doctor în medicină şi profesor de medicină la Cracovia, dar continuă până la moarte opera sa de astronom, scriind, între altele, un *Introductorium in Tabulas Alphonsi.* (Tablele astronomice deja citate mai sus). *Martin Król* o fost *primul* profesor polonez chemat să predea astronomia în celebra Universitate din Bolonia, în 1448—49. După el, o lungă serie de astronomi polonezi au fost profesori în Italia şi anume mai ales în Bolonia:

Albert din Opatow (elev al lui Martin Król) în 1454—56.

Martin Bylica din Olkusz în 1463—64.

Iacob din Zalesie în 1469—70.

Joan din Bossis în 1471—75.

George Kotermak şi *Nicolae Wodka* în 1478—82.

Iar la Padova: *Baltasar Samosarski* în 1521.

Această listă dovedeşte cât de mult erau preţuiţi astronomii din Cracovia în jumătatea a doua a veacului al XV-lea De altfel unii dintre ei au trăit ca astrologi la diferite curţi străine. *Martin Bylica din Olkusz* a plecat din Bolonia la Roma ca astrolog al Papei *Paul II.* Acolo s'a împrietenit cu celebrul matematician german *Regiomontanus,* împreună cu care a avut cunoscutul *Dialogus inter Vienensem et Cracoviensem super Cremonensis in planetarium theoricis deliramenta.* Amândoi au fost chemaţi de *Matei Corvin* în Ungaria, care le-a oferit catedre la Universitatea nou creată din Possony (Pressburg, Bratislava). Acolo şi-a compus *Regiomontanus* importantele sale *Tabulae directionum,* fiind ajutat în calcule de *Martin Bylica.* Acesta şi-a petrecut toată viaţa în Ungaria, lăsând la moarte, către 1495, toate instrumentele sale astronomice Universităţii din Cracovia. De asemeni *Ioan din Bossis* a fost astrologul episcopului *Stolz* din Oradea Mare.

Pentru a completa icoana despre înrâurirea şcoalei astronmice cracoviene asupra ştiinţei contimporane, amintim aci că numeroşi străini au studiat în Cracovia. Intre ei citâm pe *Conrad Celtis* (1459—1508), reformatorul învăţământului matematic din Viena, *Ioan Wolmar din Villingen,* reformatorul învăţământului astronomic din Wittenberg. Or, la începutul veacului al XVI-lea se ridică tocmai Universităţile din Viena şi Wittenberg, pe când cea din Cracovia decade (mai ales din cauza crizei economice care făcea ca lefurile profesorilor să fie derizorii, iar laboratoarele să nu mai fie înzestrate convenabil). Printre elevii universităţii din Cracovia mai numărăm şi pe celebrul humanist *Erasmus din Rotterdam* (1467—1536).

După *Martin Król* profesorii de astronomie cei mai renumiţi din Cracovia au fost *Andrei Grzymala din Poznan* († 1466), *Petre Gaszowiec* († 1474) elevi ai lui *Martin Król.* Apoi *Ioan*

Schelynk din Glogòw (1445—1507) şi contimporanul şi emulul său *Albert* (Woitech) *din Brudzewo* (1446—1495), profesorul lui *Copernic* (1473—1543). *Grzymala* a compus în 1449 *Canones Tabularum Resolutarum,* culegere de table astronomice reduse pentru meridianul Cracoviei. Table analoage se datoresc şi lui *Gaszowiec. Ioan Schelynk* a profesat timp de vreo 40 de ani şi a fost un poligraf neobosit, dar fără mare originalitate. In schimb *Woitech din Brudzewo* a adus inovaţii însemnate în învăţământul astronomiei, înlocuind Teoria Planetelor — veche din Evul mediu — a lui *Gerard din Cremona* prin noua *Theoricae novae* a lui *Peurbach.* De asemeni, *Woitech din Brudzewo* a compus un *Calculus exemplaris Tabularum resolutarum.* Cursurile sale erau pline de însufleţire şi au atras o pleiadă de tineri către studiile astronomice. Vreo doisprezece dintre elevii lui *Woitech* au devenit profesori între 1475 şi 1492. Dar cel mai strălucit elev al lui *Woitech* a fost *Nicolae Copernic* (1473—1543), născut în Torun. Cursurile de astronomie ale lui *Woitech,* care expun anumite obiecţiuni teoriei ptolemeiene a mişcărilor planetelor au produs o îndoială în *Copernic* despre valabilitatea vechilor ipoteze, încă din vremea de student la Cracovia (înainte de 1491). Plecat în Bolonia unde a studiat dreptul canonic în 1496—1500 şi medicina în 1501—1504, într'o a doua călătorie, *Copernic* are deja în 1497 intuiţia ipotezei heliocentrice. Creaţia nemuritoare a sistemului lui *Copernic* e o dovadă de continuitatea şi tenacitatea în muncă a autorului, care a studiat, scris, modificat şi refăcut opera sa timp de aproape patruzeci de ani. Incă în 1515 el elaborase liniile generale ale teoriei sale, pe care le-a expus într'o lucrare destinată numai cunoscuţilor şi specialiştilor şi nu marelui public: *Nicolai Copernici De hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus.* De atunci şi până la sfârşitul vieţii sale, în 1543, *Copernic* nu a avut alte preocupări ştiinţifice mai dragi decât perfecţionarea ipotezelor sale, adunarea de observaţiuni pentru evaluarea elementelor mişcărilor. Abia când era aproape de moarte s'a hotărît să dea la tipar cartea sa nemuritoare *De Revolutionibus Orbium Terrarum,* care a apărut în Nüremberg în 1543. Autorul a avut mângăerea să vadă primele corecturi ale operii vieţii sale. Imboldul fără de care poate că *Copernic* ar mai fi şovăit să dea lucrarea la tipar, şi astfel să schimbe cursul istoriei astronomiei, i-a venit de la marele matematician german *Rheticus* (acelaş pe care Despot Vodă l-a chemat în 1561 ca profesor de matematici la Academia din Cotnari).

Copernic a trăit în Warmia, canonic al catedralei de acolo, practicând şi medicina. Câtva timp a fost chiar locţiitorul episcopului din Warmia. El a întreţinut legături ştiinţifice strânse cu astronomii din Cracovia şi mai ales cu prietenul său *Martin Biem din Olkusz* († 1540), care i-a fost colaborator în rezolvarea unor chestiuni legate de opera sa. *Martin Biem* era el însuşi un astronom de seamă. In 1516 el scrie o lucrare foarte însemnată despre reforma calendarului, problemă care devenea tot mai acută şi urgentă şi care preocupa pe toţi astronomii. Cartea lui *Martin Biem* poartă titlul *Nova calendarii Romani reformatio* şi conţine critica reformei propuse de *Paul de Middelton* şi expunerea unui proect nou întemeiat pe cercetările astronomice. (Reforma calendarului s'a făcut abia în timpul papei Grigore al XIII-lea 1572—1585).

In timpul lui *Copernic* apar în Polonia primele cărţi de matematică scrise în limba polonă: Aritmetica lui *T. Klos* în 1538, a lui *B. Wojewodka* în 1563, Geometria lui *St. Grzepski* în 1566.

In tot veacul al XVI-lea singura Universitate europeană în care profesorii au curajul să expună în mod public teoria copernicianâ este Cracovia. La cinci ani după moartea lui *Copernic,* în 1548, profesorul *Ilariu din Wislica* calculează efemeridele pe 1549 conform cu ipoteza heliocentrică. *Valentin Fontani* predă în 1578—1580 astronomia bazată pe ipoteza heliocentrică. Un alt polonez, *Alexe Sylvius,* construeşte în 1640 în Spania un planetariu heliocentric. In

1651 el publică o carte relativă la calendar *Lunae circulares periodi.*

Renumele astronomiei poloneze a atras şi în veacul al XVII-lea învăţaţi străini în Polonia. Unii dintre ei au venit ca profesori, cum au fost belgienii *Charles Malapert* şi renumitul *Adrian Romain.*

Prima ediţie *completă* a operelor lui Copernic a apărut în 1854 prin îngrijirea lui *I. Baranowski* (1800—1879), astronom şi apoi director la Observatorul creat în 1825 la Varşovia

---

O PROBLEMĂ DE APLICAŢII GEOMETRICE ALE ANALIZEI MATEMATICE

DE

I. STAMATE.

D-l Prof. *P. Sergescu* într'un articol [1] cu caracter istoric s'a ocupat cu două probleme de Geometrie diferenţială şi anume:

Problema A. Să se afle curbele plane, pentru care raportul dintre segmentul M T al tangentei cuprins între M şi intersecţia T cu O x şi dintre O T e constant. În particular se consideră cazul când acest raport e 2.

Problema B. Să se afle curbele plane, pentru care raportul dintre segmentul M T al tangentei cuprins între M şi intersecţia T cu O x şi dintre abscisa lui M e constant. În particular se consideră cazul când acest raport e 2.

În cele ce urmează, voi trata aceste probleme pentru cazul general, utilizând o metodă diferită de aceea a D-lui Prof. *P. Sergescu,* considerând raportul egal cu k.

Mulţumită D-lui Prof. *V. Alaci* am aflat că problema A se găseşte soluţionată în cartea „Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches" de *F. Gomes Teixeira,* Tomul II, p. 235. Ţin să dau însă o nouă metodă de integrare, în care evit pe deoparte folosirea radicalilor, cari introduc ambiguităţi asupra valorilor şi pe de altă parte dau o reprezentare parametrică a curbelor integrale, în care parametrul are o semnificaţie geometrică, avantage care nu se găsesc în cartea citată mai sus.

[1] R. M. T., Vol. XXII, pag. 24.

* * *

Coordonatele punctului M fiind x şi y, iar X şi Y ale unui punct de pe tangenta în M la curbă, ecuaţia tangentei M T este

$$Y - y = y'(X - x).$$

Se deduce

$$O T = \frac{x y' - y}{y'}, \qquad M T = y \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'}.$$

Problema A. Ecuaţia diferenţială a problemei este:

$$x y' - y = \frac{1}{k} y \sqrt{1 + y'^2},$$

de unde

$$x = \frac{y}{y'}\left(1 + \frac{1}{k}\sqrt{1 + y'^2}\right).$$

Derivând în raport cu x, avem

$$\frac{1}{k}\sqrt{1+y'^2} - \frac{y y''}{y'^2} - \frac{y y''\sqrt{1+y'^2}}{k y'^2} + \frac{y y''}{k\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

Punând $y' = p$, avem $y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p$, variabilele se separă,

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{k}{p\sqrt{1+p^2}} + \frac{1}{p(1+p^2)}\right] dp,$$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{k\,p}{p^2\sqrt{1+p^2}} + \frac{p}{p^2(1+p^2)}\right] dp.$$

Substituind $1 + p^2 = v^2$, avem $p\,dp = v\,dv$ şi ecuaţia devine

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{k}{v^2-1} + \frac{1}{v(v^2-1)}\right] dv.$$

Integrând şi revenind la variabila iniţială, se obţine

$$(2) \qquad \boxed{y = 2c\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}+1}\right)^k \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}},$$

unde $2c$ este constanta de integrare. Din ecuaţia (1) deducem

$$(3) \qquad \boxed{x = 2c\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}+1}\right)^k \cdot \frac{1+\frac{1}{k}\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}}.$$

Am obținut astfel ecuațiile parametrice ale curbelor integrale.

Punând $p = \operatorname{tg}\alpha$, obținem

$$y = 2c \sin\alpha \operatorname{tg}^k \frac{\alpha}{2}, \quad x = \frac{2c}{k}(1 + k\cos\alpha)\operatorname{tg}^k \frac{\alpha}{2}.$$

Însă

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

deci, ecuațiile (2) și (3) se mai pot scrie

$$(4) \quad \boxed{y = 4c\frac{t^{k+1}}{1+t^2}}, \quad \boxed{x = \frac{2c}{k}t^k\frac{1+k+(1-k)t^2}{1+t^2}}.$$

Din aceste formule se observă că numărul k dacă este rațional, curbele sunt unicursale și reprezintă o familie de curbe omotetice.

Dacă numărul k este irațional, curbele sunt transcendente.

Vom reprezenta, prin urmare, graficul curbei pentru k întreg, pozitiv și $c = 1$. Din ecuațiile (4), avem

$$x' = \frac{2}{k}t^{k-1}\frac{k(k+1) - 2kt^2 + k(1-k)t^4}{(1+t^2)^2},$$

$$y' = 4t^k\frac{k+1+(k-1)t^2}{(1+t^2)^2},$$

$$m = \frac{y'}{x'} = 2kt\frac{k+1+(k-1)t^2}{k(k+1) - 2kt^2 + k(1-k)t^4}.$$

Vom deosebi următoarele cazuri:

1°. Numărul k este par și mai mare ca 1. Avem tabloul

t	x'	x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$
	$+$	cr.	$+$	cr.
-1	0	$\frac{2}{k}$		-2
	$-$	desc.	$+$	cr.
0	0	0	0	0
	$+$	cr.	$+$	cr.
$+1$	0	$\frac{2}{k}$		2
	$-$	desc.	$+$	cr.
$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$

Curba este simetrică în raport cu axa Ox, ceeace se vede și din faptul că schimbând pe t în $-t$ în ecuațiile (4), x rămâne neschimbat, iar y se schimbă în $-y$.

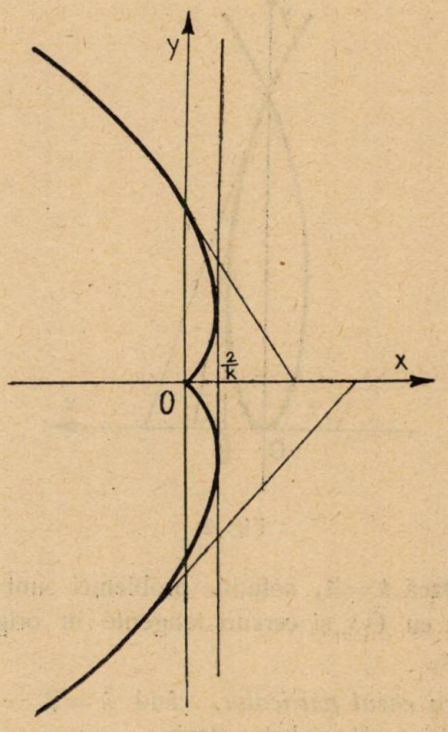


Fig. 1.

2°. Numărul k este impar și mai mare că 1. Avem

t	x'	x	y'	y
$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$
	$-$	desc.	$-$	desc.
-1	0	$-\frac{2}{k}$		2
	$+$	cr.	$-$	desc.
0	0	0	0	0
	$+$	desc.	$+$	cr.
$+1$	0	$\frac{2}{k}$		2
	$-$	desc.	$+$	cr.
$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$

Curba este simetrică în raport cu axa Oy, ceeace se mai poate deduce și din ecuațiile (4),

căci, schimbând pe t în $-t$, y rămâne neschimbat, iar x se schimbă în $-x$.

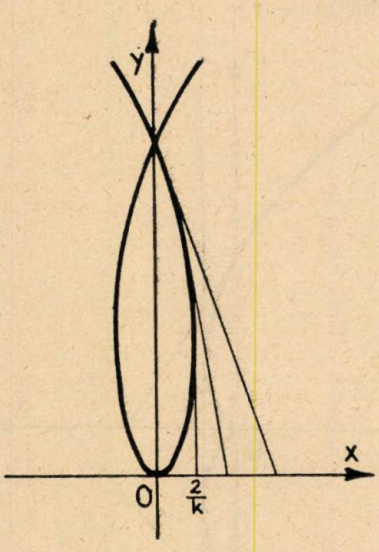


Fig. 2.

3°. Dacă $k=1$, soluţiile problemei sunt drepte paralele cu Ox şi cercuri tangente în origine la axa Ox.

Pentru *cazul particular*, când $k=2$, ecuaţiile parametrice ale curbelor devin

$$(5)\qquad y=4c\frac{t^3}{1+t^2},\qquad x=c\frac{3-t^2}{1+t^2}t^2.$$

Pentru a ajunge la forma implicită dată de *l'Hôspital* şi D-l Prof. *P. Sergescu*, vom elimina parametrul p dintre ecuaţiile (5). Avem

$$\frac{y}{x}=\frac{4t}{3-t^2}.$$

Ordonând această ecuaţie şi aceea a lui y din (5) în raport cu t, deducem ecuaţiile

$$(6)\qquad yt^2+4xt-3y=0,$$

$$(7)\qquad 4ct^3-yt^2-y=0.$$

Înmulţind ecuaţia (7) cu 3 şi scăzând din (6), deducem ecuaţia

$$(8)\qquad 3ct^2-yt-x=0.$$

Eliminând pe t dintre ecuaţiile (6) şi (8), găsim ecuaţia

$$(-xy+9cy)^2-(4x^2+3y^2)(y^2+12cx)=0,$$

$$y^4+x^2y^2+18cxy^2+16cx^3-27c^2y^2=0,$$

care coincide cu cea dată de D-l Prof. *P. Sergescu*.

Huygens (Oeuvres, t. X, p. 556 şi u.) a arătat că dacă $k<1$ curbele au un punct de întoarcere real şi a dat metoda pentru al determina.

Ecuaţia polară a curbelor este

$$\varrho=c_1\left(\frac{\sqrt{k^2-\sin^2\theta}-\cos\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\theta}+\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{k^2-\sin^2\theta}+k\cos\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2\theta}-k\sin\theta}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Problema B. Ecuaţia diferenţială este

$$kxy'=y\sqrt{1+y'^2},$$

din care deducem

$$x=\frac{y}{ky'}\sqrt{1+y'^2}.$$

Derivând în raport cu x şi punând $y'=p$, obţinem

$$\frac{dy}{y}=\frac{p\,dp}{p^2\sqrt{1+p^2}\,(\sqrt{1+p^2}-k)}.$$

Făcând aceiaşi schimbare de variabilă ca în problema A, avem

$$\frac{dy}{y}=\frac{dv}{(v^2-1)(v-k)}$$

şi prin urmare

$$\boxed{y=c\frac{(\sqrt{1+p^2}-1)^{\frac{1}{2(1-k)}}(\sqrt{1+p^2}+1)^{\frac{1}{2(1+k)}}}{(\sqrt{1+p^2}-k)^{\frac{1}{1-k^2}}}}$$

$$\boxed{x=\frac{c}{kp}\sqrt{1+p^2}\,\frac{(\sqrt{1+p^2}-1)^{\frac{1}{2(1-k)}}(\sqrt{1+p^2}-k)^{\frac{1}{2(1+k)}}}{(\sqrt{1+p^2}-k)^{\frac{1}{1+k^2}}}}$$

Ca şi mai sus, se deduce

$$\boxed{x=\frac{c}{2kt}\cdot 2^{\frac{1}{1-k^2}}(1+t^2)\frac{t^{\frac{1}{1-k}}}{[1-k+(1+k)t^2]^{\frac{1}{1-k^2}}}}$$

$$\boxed{y=c\cdot 2^{\frac{1}{1-k^2}}\cdot\frac{t^{\frac{1}{1-k}}}{[1-k+(1+k)t^2]^{\frac{1}{1-k^2}}}}.$$

În *cazul particular* $k=2$, avem

$$x=\frac{c}{4.2^{\frac{1}{3}}}\,\frac{(3t^2-1)^{\frac{1}{3}}}{t^2}\,(1+t^2), \tag{9}$$

$$y=\frac{c}{2^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{(3t^2-1)^{\frac{1}{3}}}{t}, \tag{10}$$

de unde

$$\frac{y}{x}=\frac{4t}{1+t^2}. \tag{11}$$

Ecuaţie (11) şi (10) ridicate la cub se pot scrie astfel

$$yt^2-4xt+y=0, \tag{12}$$

$$2y^3t^2-3c^3t^2+c^3=0. \tag{13}$$

Înmulţind pe (12) cu c^3 şi pe (13) cu y şi scăzând relaţiile astfel obţinute, una din alta, avem ecuaţia

$$y^4t^2-2yc^3t+2c^3x=0. \tag{14}$$

Eliminând parametrul t dintre ecuaţiile (12) şi (14), avem

$$(y^4-2c^3x)^2+4c^3(y^2-4x^2)(c^3-2xy^2)=0.$$

Familiile de curbe fiind omotetice, se deduce lesne ecuaţia

$$c^2y^8+16cx^3y^2-6cxy^4+y^2-3x^2=0$$

dată de D-l Prof. *P. Sergescu*.

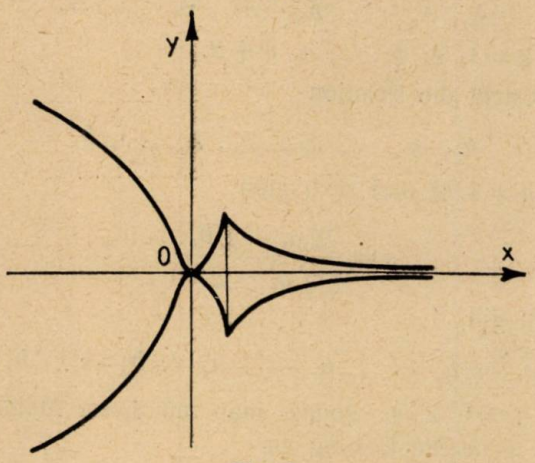


Fig 3.

Pentru reprezentarea grafică, considerând $c=1$, avem

$$x'=\frac{1}{4.2^{\frac{1}{3}}}\,\frac{(t^2-1)^2}{t^3(3t^2-1)^{\frac{2}{3}}},$$

$$y'=\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1-t^2}{t^2(3t^2-1)^{\frac{2}{3}}},\qquad m=\frac{t}{2(1-t^2)}.$$

t	x'	x	y'	y
$-\infty$		$+\infty$		0
	$-$	desc.	$-$	desc.
-1		$\frac{1}{2}$	0	-1
	$-$	desc.	$+$	cr.
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		0
	$-$	desc.	$+$	cr.
0	∞	$-\infty$		$\pm\infty$
	$+$	cr.	$+$	cr.
$\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		0
	$+$	cr.	$+$	cr.
1		$\frac{1}{2}$	0	1
	$+$	cr.	$-$	desc.
$+\infty$		$+\infty$		0

Curba este simetrică în raport cu axa O x, observare care se poate deduce şi din ecuaţiile (9) şi (10).

Lucrarea prezentă a fost expusă la îndemnul D-lui Prof. *P. Sergescu*, la Seminarul de Matematici al Universităţii din Cluj, actualmente la Timişoara, de sub conducerea D-lui Prof. *Th. Angheluţă*.

NOTE MATEMATICE

10. — *Un procédé simple pour obtenir une infinité de solutions entières du système diophantien*

$$A_1^p+A_2^p+A_3^p=B_1^p+B_2^p+B_3^p\quad(p=1,\ 3).$$

Nous simplifierons d'abord l'écriture en écrivant le système sous la forme

$$(A_1,\ A_2,\ A_3)^p=(B_1,\ B_2,\ B_3)^p,\quad(p=1,\ 3).$$

Si alors

$$(A'_1, A'_2, A'_3, B'_1, B'_2, B'_3)$$
$$(A''_1, A''_2, A''_3, B''_1, B''_2, B''_3)$$

désignent deux solutions initiales, on aura une nouvelle solution

$$(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$$

si

$$A_i = A'_i + t\,A''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et

$$B_i = B'_i + t\,B''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

t étant déterminée par l'équation

$$\sum_{i=1}^{3} A_i'^2 A''_i - \sum_{i=1}^{3} B_i'^2 B''_i = \left(\sum_{i=1}^{3} B'_i B''^2_i - \sum_{i=1}^{3} A'_i A''^2_i\right) t.$$

t étant de la forme $\frac{v}{u}$ (u et v premiers entre eux), on aura pour la solution entière:

$$A_i = u\,A'_i + v\,A''_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$B_i = u\,B'_i + v\,B''_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On peut prendre pour (A'_i, B'_i), (A''_i, B''_i) des solutions évidentes telles que

$$A'_i : a', b', -a', \qquad B'_i : c', b', -c',$$
$$A''_i : a'', b'', -a'', \qquad B''_i : c'', b'', -c''.$$

Exemples numériques.

A. $(3, 0, -3)^p = (2, 0, -2)^p$, $(p=1, 3)$
$(2, -2, 0)^p = (5, -5, 0)^p$, $(p=1, 3)$

$$t = -\frac{1}{19}, \qquad A_i = 19\,A'_i - A''_i \text{ etc.}$$

$(55, 2, -57)^p = (33, 5, -38)^p$,
ou $(2, 38, 55)^p = (5, 33, 57)^p$, $(p=1, 3)$
$S_1 = 96, \quad S_3 = 221.255.$

B. $(3, 1, -3)^p = (2, 1, -2)^p$, $(p=1, 3)$
$(2, -2, 0)^p = (4, -4, 0)^p$, $(p=1, 3)$

$$t = \frac{1}{8}, \qquad A_i = 8\,A'_i + A''_i \text{ etc.}$$

$(26, 6, -24)^p = (20, 4, -16)^p$,
ou $(3, 8, 13)^p = (2, 10, 12)^p$, $(p=1, 3)$
$S_1 = 24, \quad S_3 = 2.736.$

C. $(1, 5, 5)^p = (2, 3, 6)^p$, $(p=1, 3)$
$(4, 0, -4)^p = (5, 0, -5)^p$, $(p=1, 3)$

$$t = \frac{8}{13}, \qquad A_i = 13\,A'_i + 8\,A''_i \text{ etc.}$$

$(45, 65, 33)^p = (66, 39, 38)^p$, $(p=1, 3)$
$S_1 = 143, \quad S_3 = 401\,687.$

D. $(2, 0, -2)^p = (5, 0, -5)^p$, $(p=1, 3)$
$(3, -3, 0)^p = (4, -4, 0)^p$, $(p=1, 3)$

$$t = -\frac{44}{31}, \qquad A_i = -31\,A'_i + 44\,A''_i \text{ etc.}$$

$(70, -132, 62)^p = (21, -176, 155)^p$,
ou $(62, 70, 176)^p = (21, 132, 155)^p$, $(p=1,3)$
$S_1 = 308, \quad S_3 = 6.033.104.$

E. $(3, 0, -3)^p = (4, 0, -4)^p$, $(p=1, 3)$
$(5, -5, 0)^p = (6, -6, 0)^p$, $(p=1, 3)$

$$t = -\frac{17}{23}, \qquad A_i = 23\,A'_i - 17\,A''_i.$$

$(-16, 85, -69)^p = (-10, 102, -92)^p$,
ou $(10, 85, 92)^p = (16, 69, 102)^p$, $(p=1,3)$
$S_1 = 187, \quad S_3 = 1.393.813.$

F. $(4, 0, -4)^p = (5, 0, -5)^p$, $(p=1, 3)$
$(6, -6, 0)^p = (7, -7, 0)^p$, $(p=1, 3)$

$$t = -\frac{79}{101}, \qquad A_i = 101\,A'_i - 79\,A''_i, \text{ etc.}$$

$(-70, 474, -404)^p = (-48, 553, -505)^p$, ou
$(48, 505, 474)^p = (70, 404, 553)^p$, $(p=1,3)$
$S_1 = 1.027, \quad S_3 = 235.394.641.$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

11. — *Über simultane Identitäten der Form*

$$A_1, A_2, \ldots, A_v \overset{k}{=} B_1, B_2, \ldots, B_v$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots, n, n+2$.

Besteht die Relation

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_r \overset{n}{=} b_1, b_2, \ldots, b_r$$

für $n = 1, 2$ und setzt man

(2) $$s = \frac{\sum a_i^4 - \sum b_i^4}{4(\sum a_i^3 - \sum b_i^3)},$$

dann gilt

(3) $a_1 - s, a_2 - s, \ldots, a_r - s \overset{n}{=} b_1 - s, b_2 - s, \ldots, b_r - s$

für $n = 1, 2, 4$, sodass man mit dieser Methode eine generelle Lösung zu

(4) $$U_1, U_2, \ldots, U_x \overset{n}{=} V_1, V_2, \ldots, V_x$$

für $n = 1, 2, 4$ bekommt $(x > 2)$.

Diese Tatsache lässt sich nach dem binomischen Lehrsatz beweisen. Da nach diesem

$$(a_1 - s)^4 = a_1^4 - 4a_1^3 s + 6a_1^2 s^3 - 4a_1 s^3 + s^4$$

ist, so ist

$$(5) \quad \Sigma(a_i - s)^4 - \Sigma(b_i - s)^4 = (\Sigma a_i^4 - \Sigma b_i^4) - 4s(\Sigma a_i^3 - \Sigma b_i^3) + 6s^2(\Sigma a_i^2 - \Sigma b_i^2) - 4s^3(\Sigma a_i - \Sigma b_i) + \Sigma(s^4 - s^4).$$

Auf der rechten Seite von (5) ist das letzte Glied 0, im vorletzten und drittletzten Gliede verschwinden die Klammern zufolge Kondition (1) ebenfalls, in (5) bleibt also s nur in der 1. Potenz stehen.

Generell lässt sich durch den binomischen Lehrsatz beweisen: Besteht die Relation

$$(6)\ a_1, a_2, \ldots, a_r \overset{p}{=} b_1, b_2, \ldots, b_r \quad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

wo

$$\Sigma a_i^{n+1} \neq \Sigma b_i^{n+1}$$

und setzt man

$$s = \frac{\Sigma a_i^{n+2} - \Sigma b_i^{n+2}}{(n+2)(\Sigma a_i^{n+1} - \Sigma b_i^{n+1})},$$

dann gilt die simultane Identität

$$(7)\ a_1 - s, a_2 - s, \ldots, a_r - s \overset{p}{=} b_1 - s, b_2 - s, \ldots, b_r \quad s$$

für $p = 1, 2, \ldots, n, n+2$ und wir bekommen mit dieser Methode Lösungen zu

$$A_1, A_2, \ldots, A_v \overset{k}{=} B_1, B_2, \ldots, B_v$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots, n, n+2$.

(8) *Exempel:* Aus $2, 6\ 15 \overset{n}{=} 0, 11, 12$ $(n = 1, 2)$ folgt

$$s = \frac{51937 - 35377}{4 \cdot (3599 - 3059)} = \frac{23}{3}.$$

Wir bekommen

$$2 - \frac{23}{3}, 6 - \frac{23}{3}, 15 - \frac{23}{3} \overset{n}{=} 0 - \frac{23}{3}, 11 - \frac{23}{3}, 12 - \frac{23}{3}$$

für $n = 1, 2, 4$ auf ganze Zahlen gebracht

$(-17), (-5), 22 \overset{n}{=} (-23), 10, 13$ für $n = 1, 2, 4$.

ALFRED MOESSNER
ANSBACH (GERMANIA-BAVARIA)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, No. 10, Iunie 1943. † Profesorul *Andrei Gh. Ioachimescu* (urmare şi sfârşit) de *Alexandru Stoenescu*. Sisteme de vectori cu rezultante generale paralele cu o dreaptă sau cu un plan, de *D. V. Ionescu*. Raport asupra premiului *V. Cristescu*, de *C. Ionescu-Bujor, Al. Niculescu* şi *Al. Pantazi*. Premiul Lt. Col. *G. A. Tănăsescu*, de *I. I. Chiţulescu, Al. Pantazi* şi *Al. Bunescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. C-dor Dr. Ing *Ion Linteş* Teoria Indicatorilor.

Este o broşură f rmat mic de 106 pagini, care cuprinde proprietăţi şi aplicaţii interesante din *„Teoria indicatorilor"*, clar şi elementar expuse. Cuprinde următoarele trei capitole: 1. Numărul numerilor prime cu un număr dat şi mai mici ca el Ind catorul. 2. Suma numerilor prime cu un număr dat şi mai mici ca el. 3. Produsul numerilor prime cu un număr dat şi mai mici ca el.

3. *I. I Chiţulescu.* Culegere de probleme de *„Geometrie Descriptivă"*. Partea I a, 1942.

Culegerea conţine interesante probleme şi soluţiile lor, folositoare studenţilor de la politehnici şi universităţi. Cartea este însoţită de o luminoasă întroducere istorică a D-lui Prof. *Ion Ionescu.*

4. *Th. Angheluţă.* Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles. (Mathematica, Vol. XIX, 1943).

5 *P. Sergescu.* Asupra unei generalizări a ecuaţiilor diferenţiale omogene de ordinul întâi. (Extras din „R. M. T.", An. XXII, p 28, 1943).

6. *Ioan Armeanca.* Vorläufige Bestimmund der geographischen Länge der Universitäts-Sternwarte zu Cluj-Timişoara (Mathematica, Vol. XIX, 1943).

7. **Observare**. Nota matematică No. 8, din numărul precedent, intitulată, *„Note din teoria numerelor"* şi nesemnată, aparţine D-lui Prof. *G. Iuga.*

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1782. — *Într'un triunghiu* ABC *se duc bisectoarele interioare* AA_1, BB_1, CC_1, *apoi se prelungesc* A_1B *cu* $BM = AB$, B_1C *cu* $CN = BC$ *şi* C_1A *cu* $AP = CA$.

1°. Să se arate că avem

$$\frac{A_1B}{A_1M} + \frac{B_1C}{B_1N} + \frac{C_1A}{C_1P} = 1.$$

2°. Cunoscând rapoartele

$$\frac{A_1B}{A_1M}, \frac{B_1C}{B_1M}, \frac{C_1A}{C_1P},$$

se cere să se calculeze unghiurile triunghiului ABC.

V. ALACI

Soluţie. Fie un triunghiu oarecare ABC, în care notăm laturile obicinuit, cu a, b, c. Fie bisectoarea AA_1 şi prelungim A_1B cu $BM = AB = c$.

1°. În virtutea teoremei cunoscute că, *bisectoarea unui unghiu a unui triunghiu împarte latura opusă în părți proporționale cu laturile adiacente*, avem

$$\frac{A_1B}{c}=\frac{A_1C}{b}.$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor și observând că $A_1B+A_1C=a$, avem

$$\frac{A_1B}{c}=\frac{a}{b+c},$$

deci

(1) $$A_1B=\frac{ac}{b+c}.$$

Observăm apoi că,

(2) $$A_1M=A_1B+BM=\frac{ac}{b+c}+c=\frac{c(a+b+c)}{b+c}.$$

Din (1) și (2) deducem

(3) $$\frac{A_1B}{A_1M}=\frac{a}{a+b+c}.$$

Analog, rezultă:

(4) $$\frac{B_1C}{B_1N}=\frac{b}{a+b+c},\quad \frac{C_1A}{C_1P}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Adunând relația (3) cu relațiile (4), obținem

$$\frac{A_1B}{A_1M}+\frac{B_1C}{B_1N}+\frac{C_1A}{C_1P}=1.$$

Relația cerută este astfel stabilită.

2°. Însemnăm cu α, β, γ rapoartele date în enunț, anume

(5) $$\frac{A_1B}{A_1M}=\alpha,\quad \frac{B_1C}{B_1N}=\beta,\quad \frac{C_1A}{C_1P}=\gamma.$$

Având în vedere relațiile (3) și (4), putem scri

$$\frac{a}{a+b+c}=\alpha,\quad \frac{b}{a+b+c}=\beta,\quad \frac{c}{a+b+c}=\gamma,$$

de unde deducem, notând $a+b+c=2p$,

(6) $$a=2p\alpha,\quad b=2p\beta,\quad c=2p\gamma.$$

Acum folosim următoarele relații din *trigonometrie*, care dau unghiurile în funcție de laturi

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Înlocuind pe a, b, c prin valorile lor din (6) și simplificând sub radical cu p^2, obținem respectiv

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(1-2\beta)(1-2\gamma)}{1-2\alpha}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(1-2\gamma)(1-2\alpha)}{1-2\beta}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(1-2\alpha)(1-2\beta)}{1-2\gamma}}.$$

Cum α, β, γ sunt cunoscute prin ipoteză, aceste relații permit a afla unghiurile A, B, C.

Observare. A se vedea o soluție mai simplă a acestei probleme în „*Trigonometria patratică*“, pag. 128.

Soluții bune date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Șimon Ș. Petre* (lic Arad). *Țica P. Marin-Gall Țilică C. Ștefan* și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1825. — *Fiind date integralele*

$$\alpha=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x(1+\sin 2x)},\quad \beta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}(1+\sin 2x)},$$

să se stabilească relația:

$$e^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{2-\beta}.$$

C. BORS

Soluție. După formulele (11) și (45) din „*Trigonometria patratică*“, anume

$$D\sin=\sin^2x+c\sin^2x,\quad \text{pentru}\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},$$

prima și a 2-a integrală devin

(1) $$\alpha=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\sin x}=(\lg\sin x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\lg\frac{1}{2}=\lg 2,$$

(2) $$\beta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\sqrt{\sin x}}=2(\sqrt{\sin x})_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2-\sqrt{2}.$$

Din (1) și (2) deducem

$$e^{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2},\qquad 2-\beta=\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}},$$

de unde rezultă imediat

$$e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{2-\beta},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii analoage date de autor şi de d-l *A. Gloden* (Luxemburg).

Problema 1923. — *Cu cifrele de la 1 la 9 inclusiv, luate o dată, să se formeze trei patrate perfecte.*

V. THÉBAULT

Fie a_i^2, b_j^2, c_k^2 trei patrate perfecte de câte i, j k cifre. Rezolvarea problemei comportă examinarea a mai multor cazuri după valorile lui i, j, k. Patratele de 1, 2 şi 3 cifre fiind cuprinse între 1^2 şi 31^2 se pot calcula cu uşurinţă. Ele se înscriu într'un tabel pentru a se folosi la examinarea diferitelor cazuri.

Cazul I. $i=j=1$ şi $k=7$. Acest caz se sub divide în 3 cazuri după cum luăm pentru a_1 şi b_1 grupele:

1 cu 4; 1 cu 9 sau 4 cu 9.

1°. Fie $a_1^2=1$ şi $b_1^2=4$. Rămâne ca c_7^2 să fie format întrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele

(1) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9.

Observăm că

$$2356789 \leq c_7^2 \leq 9876532,$$

*** (2) $$1535 < c_7 \leq 3142.$$

Pentru găsirea lui c_7^2 întrebuinţăm metoda dată de D-l *M. Ghermănescu* la pag. 87, vol. XXI, R. M. T. sau, dacă dispunem de o tablă a terminaţiunilor patratelor perfecte, utilizăm acea tablă. Vom folosi această din urmă cale, căci dispunem în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 368, de un tabel al terminaţiunilor patratelor perfecte şi al formei corespunzătoare a rădăcinei.

Vom examina 2 cazuri, spre a arăta spiritul metodei şi apoi vom da numai rezultatele.

Mai întâi o întrebare. *S'ar putea găsi patrate perfecte de 7 cifre, întrebuinţând câte o dată pe fie-care din cifrele şirului (1)?*

Observăm că numerele şirului (1) au suma:

$$2+3+5+6+7+8+9=40=9m+4.$$

Faţă de divizorul 9, un patrat perfect N^2 şi rădăcina sa N poate fi de una din formele

$$(3)\quad \boxed{\begin{array}{l} N^2=9m\ ;\ 9m+1,\ 9m+4, \text{ sau } 9m+7 \\ N=3m'\ ;\ 9m'\pm 1,\ 9m'\pm 2, \text{ sau } 9m'\pm 4 \end{array}}.$$

Deci cu cifrele şirului (1) s-ar putea forma un patrat de 7 cifre.

Considerăm acum pe rând toate terminaţiunile de 3 cifre din tabelul din *Gazeta Matematică*, XXXVII, p. 368, care nu au nici una din cifrele 0, 1, 4 şi care nu au cifre identice.

Fie de exemplu terminaţia 296. În tabelul citat se arată că dacă c_7^2 se termină cu 296, atunci

(4) $$c_7 = 500n \pm 36.$$

Ţinând seamă de limitele (2), c_7 dat de (4), ar putea fi unul din numerele

1964, 2036, 2464, 2536.

Ridicând la patrat aceste numere se găseşte soluţia

$$1964^2 = 3857296,$$

care împreună cu

$$1^2=1 \quad \text{şi} \quad 2^2=4$$

dau o soluţie a problemei.

La fel se examinează şi celelalte terminaţiuni.

2°. Fie $a_1^2=4$ şi $b_1^2=9$, deci c_7^2 ar fi un număr format de cifrele 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 a căror sumă este $9m+5$. Dar din tabloul (3) se vede că un număr de forma $9m+5$ *nu poate fi patrat perfect*. Deci 2° nu dă soluţii.

La fel se examinează cazurile

$i=1, j=2, k=6$; $i=1, j=3, k=5$; $i=1, j=4, k=4$; $i=2, j=2, k=5$; $i=2, j=3, k=4$; $i=3, j=3, k=4$

şi se găsesc următoarele 13 grupe de soluţii:

$1^2=1,\ 2^2=4,\ 1816^2=3297856;$
$1^2=1,\ 2^2=4,\ 1964^2=3857296;$
$1^2=1,\ 2^2=4,\ 2414^2=5827396;$
$1^2=1,\ 2^2=4,\ 2527^2=6385729;$
$1^2=1,\ 2^2=4,\ 2927^2=8567329;$
$1^2=1,\ 2^2=4,\ 3094^2=9572836;$
$2^2=4,\ 5^2=25,\ 374^2=139876;$
$2^2=4,\ 5^2=25,\ 626^2=391876;$
$4^2=16,\ 5^2=25,\ 272^2=73984;$
$5^2=25,\ 8^2=64,\ 281^2=78961;$
$6^2=36,\ 9^2=81,\ 273^2=74529;$
$4^2=16,\ 28^2=784,\ 73^2=5329;$
$19^2=361,\ 23^2=529,\ 28^2=784.$

Notă. 1°. D-l *J. Mahrenholz* a trimis un tabel cu 9 grupe de soluţii, fără a arăta cum le-a găsit.

2° Propunătorul problemei a dat ca indicaţie numai soluţia 361, 529, 784.

3°. În *Mathesis*, XLVIII, d-l *V. Thébault* a publicat un supliment cu titlul *Sur les nombres terminaux des carrés* în care a dat toate patratele ce se scriu cu cifre diferite. Utilizând acele rezultate s-ar putea verifica soluţiile pe care le-am dat problemei 1923. În orice caz problema este extrem de migăloasă şi cere multe calcule şi multă răbdare, singurul interes pe care-l prezintă problemele de asemenea natură.

4° Folosind aceleaşi mijloace ca la soluţia problemei 1923 am găsit că, *intrebuinţând câte o singură dată cifrele de la 0 la 9 inclusiv, se pot forma 51 grupe de câte 3 patrate perfecte şi anume.*

1, 4, $8305^2=68973025$	9, 36, $2802^2=7851204$
1, 4, $9223^2=85063729$	9, 81, $2175^2=4730625$
1, 4, $9295^2=86397025$	9, 81, $2595^2=6730425$
1, 4, $9916^2=9832056$	9, $18^2=324$, $759^2=576081$
1, 25, $1936^2=3748096$	9, $24^2=576$, $639^2=408321$
1, 25, $2528^2=6390784$	9, $24^2=576$, $651^2=423801$
1, 36, $2095^2=4389025$	9, $42^2=1764$, $195^2=38025$
1, 49, $2684^2=7203856$	9, $48^2=2304$, $126^2=15876$
1, 49, $2945^2=8673025$	9, $69^2=4761$, $195^2=38025$
1, $17^2=289$, $598^2=357604$	9, $72^2=5184$, $144^2=20736$
1, $23^2=529$, $872^2=760384$	9, $72^2=5184$, $174^2=30276$
1, $24^2=576$, $968^2=937024$	16, $28^2=784$, $305^2=93025$
1, $25^2=625$, $757^2=573049$	25, $19^2=361$, $217^2=47089$
1, $28^2=784$, $625^2=390625$	25, $28^2=784$, $199^2=39601$
1, $28^2=784$, $797^2=635209$	36, $507^2=257049$, $705^2=497025$
1, $55^2=3025$, $272^2=73984$	49, $19^2=361$, $295^2=87025$
4, 25, $1949^2=3798601$	81, $24^2=576$, $153^2=23409$
4, $17^2=289$, $416^2=173056$	81, $24^2=576$, $198^2=39204$
4, $37^2=1369$, $295^2=87025$	81, $27^2=729$, $252^2=63504$
4, $44^2=1936$, $295^2=87025$	81, $48^2=230$, $87^2=7569$
4, $53^2=2809$, $124^2=15376$	81, $57^2=3249$, $84^2=7056$
4, $55^2=3025$, $133^2=17689$	81, $73^2=5329$, $78^2=6084$
4, $55^2=3025$, $137^2=18769$	$18^2=324$, $24^2=576$, $33^2=1089$
4, $55^2=3025$, $281^2=78961$	$18^2=324$, $24^2=576$, $99^2=9801$
4, $55^2=3025$, $286^2=81796$	$28^2=784$, $31^2=961$, $55^2=3025$
4, $73^2=5329$, $259^2=67081$	

La aceste grupe ar fi de adăugat grupele în care unul din pătratele de n cifre este format de n cifre semnificative precedat de un zero, de exemplu grupa

1, 04, 3297856 sau 1, 4, 03297856 etc.

Acestea sunt însă soluţiile problemei 1923 la care se adaugă cifra 0 înaintea unuia din patrate.

G-l Gh. B.

PROBLEME PROPUSE

2146. — Să se găsească numărul $N=n^2$, prim cu 4400 numere din şirul 1, 2, . . . , N, n fiind un produs de numere prime la puterea întâia.

VIRGIL BARBU

2147. — Să se simplifice expresia

$$\frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{37+i\sqrt{47}}+\sqrt{2}\,\sqrt[3]{35+i\sqrt{47}}}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{37-i\sqrt{47}}+\sqrt{2}\,\sqrt[3]{35-i\sqrt{47}}},$$

în care $i=\sqrt{-1}$. G-L GH. BUICLIU

2148. — Să se rezolve ecuaţia

$$x^6-4x^4-2x^4+16x^3-4x^2-16x+8=0,$$

ştiind că printr'o substituţie convenabilă se reduce la o ecuaţie de gradul al 3-lea. I. V. MATIES

2149. — Să se calculeze suma

$$S=C_{k+1}^k+C_{k+2}^k+3C_{k+3}^k+\cdots+(n-k)C_n^k,$$

unde simbolul C_m^k reprezintă numărul combinărilor de m obiecte luate câte k. EUGEN VISA

2150. — Se ia, pe axele rectangulare Ox şi Oy, punctele A şi B astfel ca $OA=OB$. Se duce o secantă variabilă ce trece prin origină şi cere taie dreapta AB în C. Paralela la Ox prin C, intersectează bisectoarea unghiului AOC în I. Să se găsească locul geometric al punctului I, când unghiul AOC variază. EUGEN I. SIPOS

2151. — Fie A, B, C trei puncte pe o dreaptă astfel ca $\overline{AB}=\overline{BC}$. Prin B se duce o dreaptă variabilă (D_1), iar prin C perpendiculara (D_2) la (D_1).

Fie δ_1, δ_2 respectiv distanţele punctului A la dreptele (D_1) şi (D_2). Se cere locul geometric al punctului P având coordonatele: $x=\delta_1$, $y=\delta_2$.

EUGEN WEGENER

2152 — Dacă într'un triunghiu există relaţia

$$cp\,A+cp\,B+cp\,C=1,$$

acel triunghiu este dreptunghic.

Dacă se mai dă încă relaţia

$$sp\,B+sp\,C+2\,sp\,B\,sp\,C=\sqrt{2},$$

se cere să se determine şi celelalte unghiuri.

V. ALACI

2153. — Să se studieze mişcarea unui punct material $M(x, y, z)$, de masă m, sub acţiunea unei forţe F, ale cărei proecţiuni pe axe sunt,

$$X=-\frac{3mk^4x}{16z^4},\qquad Y=-\frac{3mk^4y}{16z^4},$$

$$Z=-\frac{mk^4}{4z^3},$$

unde k este o constantă, ştiind că în momentul iniţial $(t=0)$, avem relaţiile

$$y\,z_0^2x_0'=k^2z_0,\quad 4z_0^2y_0'=k^2y_0,\quad 2z_0z'=k^2.$$

M GHERMANESCU

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.

2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.

3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,

4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

5. Sub-Lt *Moisă I. Gheorghe.* Adresa: *Agripina Moisă,* Str. Ştefan cel Mare No. 242, Roman.

6. *Petre F. Ionescu.* Strada Severinului No. 76, Craiova.

7. *Ioan N. Gligor.* Aliuş, Jud. Timiş-Torontal.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim şi rugăm a nu ni se mai trimete, deocamdată, abonamente.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXII, cu preţul de lei 300 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXIII. AUGUST 1943 No. 6.

BIBLIOTECA ... ASOCIAȚIA ... SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA**: INSUMARI PRIN PARTI.
2. NOTE MATEMATICE 12, 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 961, 1788, 1830, 1831.
5. PROBLEME PROPUSE: 2154–2161.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie, să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politehnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politehnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politehnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broșate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 6 TIMISOARA, AUGUST 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

INSUMARE PRIN PĂRȚI

DE

EUGEN VIȘA.

Ne propunem a face o scurtă expunere asupra unei metode particulare de însumare, căreia, din cauza analogiei ce are cu metoda cunoscută a integrării prin părți, am fost conduși a-i da numele de *metoda de însumare prin părți.*

Această metodă din urmă nu este nici ea cu totul necunoscută, pentrucă o găsim destul de frecvent întrebuințată în aplicații, de către diferiți autori, însă ceeace se pare că lipsește propriu zis, este existența unei expuneri de ansamblu asupra ei, așa încât prezentul articol, pe lângă toată conciziunea cerută, vrea să umple acest gol.

1. *Formula însumării prin părți.* Problema fundamentală a însumării prin părți constă în stabilirea identității

$$\text{(I)}\qquad \boxed{\sum_{i=p}^{n}\left(a_i\sum_{k=p}^{i}b_k\right)+\sum_{i=p}^{n}\left(b_i\sum_{k=p}^{i}a_i\right)=\left(\sum_{i=p}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=p}^{n}b_i\right)+\sum_{i=p}^{n}(a_i\,b_i)},$$

căreia-i vom zice încă și *formula de însumare prin părți.*

Să vedem cum putem ajunge la formula (I). Pentru aceasta vom pleca dela una oarecari din cele două sume parțiale, cari figurează în primul membru al ei, de exemplu dela cea dintâi.

Notând această sumă prin S_n, adică punând prin convenție:

$$\text{(1)}\qquad S_n=\sum_{i=p}^{n}\left(a_i\sum_{k=p}^{i}b_k\right),$$

după o primă desvoltare vom putea scrie:

$$S_n=a_p\sum_{k=p}^{p}b_k+a_{p+1}\sum_{k=p}^{p+1}b_k+a_{p+2}\sum_{k=p}^{p+2}b_k+\cdots+a_n\sum_{k=p}^{n}b_k,$$

de unde, printr'o a doua desvoltare și aranjarea termenilor ce rezultă sub forma unui tablou triunghiular, deducem apoi:

$$\text{(2)}\qquad \left\{\begin{array}{l} S_n=a_p\,b_p+\\ +a_{p+1}\,b_p+a_{p+1}\,b_{p+1}+\\ +a_{p+2}\,b_p+a_{p+2}\,b_{p+1}+a_{p+2}\,b_{p+2}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ +a_n\,b_p+a_n\,b_{p+1}+a_n\,b_{p+2}+\cdots+a_n\,b_n. \end{array}\right.$$

Făcând acum suma termenilor acestui tablou triunghiular pe coloane, obținem

$$S_n=b_p\sum_{k=p}^{n}a_k+b_{p+1}\sum_{k=p+1}^{n}a_k+b_{p+2}\sum_{k=p+2}^{n}a_k+\cdots+b_n\sum_{k=n}^{n}a_k,$$

ceeace, prin desăvârșirea condensării scrisului, dobândește apoi forma:

$$\text{(3)}\qquad S_n=\sum_{i=p}^{n}\left(b_i\sum_{k=i}^{n}a_k\right).$$

Dar cum, pe de altă parte:

$$\sum_{k=i}^{n}a_k=\sum_{k=p}^{n}a_k-\sum_{k=p}^{i-1}a_k=\sum_{k=p}^{n}a_k-\sum_{k=p}^{n}a_k+a_i,$$

relația (3) devine la rândul său:

$$S_n=\sum_{i=p}^{n}\left[b_i\left(\sum_{k=p}^{n}a_k-\sum_{k=p}^{i}a_k+a_i\right)\right]$$

așa că, aplicând încă unele artificii elementare de calcul, în continuare deducem:

$$S_n=\sum_{i=p}^{n}\left(b_i\sum_{k=p}^{n}a_k\right)-\sum_{i=p}^{n}\left(b_i\sum_{k=p}^{i}a_k\right)+\sum_{i=p}^{n}(a_i\,b_i)$$

$$=\left(\sum_{k=p}^{n}a_k\right)\left(\sum_{i=p}^{n}b_i\right)-\sum_{i=p}^{n}\left(b_i\sum_{k=p}^{n}a_k\right)+\sum_{i=p}^{n}(a_i\,b_i),$$

şi schimbând parţial de notaţie, în cele din urmă, avem

$$(4)\quad S_n=\left(\sum_{i=p}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=p}^{n}b_i\right)-\sum_{i=p}^{n}\left(b_i\sum_{k=p}^{n}a_k\right)+\sum_{i=p}^{n}(a_i b_i),$$

relaţie care, în virtutea celor convenite sub (1), este în fond, chiar formula de însumare (I).

2. *Diferite aspecte ale formulei de însumare prin părţi.* Formula (I) a însumării prin părţi este susceptibilă de a fi înfăţişată sub diferite aspecte, după valorile particulare, pe cari le dăm lui p.

În special pentru $p=0$ şi $p=1$ această formulă dobândeşte respectiv următoarele aspecte remarcabile:

$$(II)\quad \boxed{-\sum_{i=0}^{n}\left(a_i\sum_{k=0}^{i}b_k\right)+\sum_{i=0}^{n}\left(b_i\sum_{k=0}^{i}a_k\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}b_i\right)+\sum_{i=0}^{n}(a_i b_i)},$$

şi

$$(III)\quad \boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{k=1}^{i}b_k\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(b_i\sum_{k=1}^{i}a_k\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)+\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)}.$$

Avem totuşi de observat că chiar sub aceste din urmă aspecte, formula însumării prin părţi nu este în fond mai particulară decât în cazul iniţial sub care am prezentat-o în relaţia (I), deoarece, după cum e uşor de constatat, prin deplasări convenabile de indici, putem trece invers dela oricare din relaţiile (II) sau (III), ca şi încă dela altele analoage lor, la relaţia (I).

Nu pregetăm însă pe de altă parte a menţiona că formulele constituite de relaţiile (II) şi (III), fiind degrevate de complicaţia aparentă a formulei (I), sunt în general de natură a se impune cu precădere faţă de aceasta din urmă, căreia, drept consecinţă, îi reduc astfel importanţa în profitul lor.

3. *Aplicaţii.* Iată acum şi câteva aplicaţii dintre cele mai simple, relative la metoda însumării prin părţi. Pentru motivul mai sus amintit, ne vom raporta însă în această privinţă exclusiv la formulele (II) şi (III).

1°. Să facem în primul rând în formula (III) $a_i=b_i=1$. Avem astfel:

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}1\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)+1\right]$$

şi ţinând seama de relaţia evidentă:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n}1=n$$

şi analoaga ei:

$$(5')\quad \sum_{k=1}^{i}1=i,$$

vom putea scrie

$$2\sum_{i=1}^{n}i=n(n+1),$$

de unde, deducem apoi:

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2},$$

adică, chiar formula clasică pentru calculul sumei celor dintâi n numere întregi şi pozitive.

2°. Să facem acum în al doilea rând în formula (III) $a_i=i$ şi $b_i=1$. Având atunci în vedere formulele (5) şi (6), găsim:

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)^2}{2}$$

de unde, în continuare deducem:

$$\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)^2}{2}$$

ceeace, dacă avem iarăşi în vedere formula (6, prin rezolvare în raport cu $\sum_{i=1}^{n}i^2$, ne dă:

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

care nu-i de cât formula cunoscută pentru calculul sumei patratelor primelor n numere întregi şi pozitive [1].

3°. Să mai facem încă tot în relaţia (III), $a_i = x^{i-1}$ şi $b_i = 1$. Avem astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} x^{k-1}\right) = n\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} x^{i-1}$$

$$= (n+1)\sum_{i=1}^{n} x^{i-1}$$

şi întrucât presupunem cunoscută formula:

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

relaţia de mai sus devine

$$\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i - 1}{x - 1} = \frac{(n+1)(x^n - 1)}{x - 1}$$

sau încă, sub o formă puţin diferită:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1} + \frac{1}{x-1}\left(x\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} - \sum_{i=1}^{n} 1\right) =$$

$$\frac{(n+1)(x^n - 1)}{x - 1}.$$

Or, dacă ne referim din nou la formula (9), ţinând evident seama şi de (5), ultima relaţie se va scrie încă

$$\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1} + \frac{1}{x-1}\left[\frac{x(x^n - 1)}{x - 1} - n\right] = \frac{(n+1)(x^n - 1)}{x - 1},$$

[1]) Formula (7) ne mai poate conduce la formula (8) şi în alt mod, anume bazându-ne pe anumite proprietăţi cunoscute ale combinărilor. În adevăr, observând în prealabil că

$$\frac{i(i+1)}{2} = C_{i+1}^{2},$$

simbolul C_p^q reprezentând numărul combinărilor de p obiecte luate câte q, formula (7), se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} C_{i+1}^{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

şi ţinând apoi seama de relaţia

$$\sum_{i=1}^{n} C_{i+1}^{2} = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3 =$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6},$$

formula (8) rezultă şi ea numai decât.

de unde, izolând necunoscuta $\sum_{i=1}^{n} i\,x^{i-1}$, după efectuarea tuturor calculelor deducem

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\,x^{n-1} = \frac{n\,x^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x-1)^2},$$

formulă care, de fapt este şi ea cunoscută.

4°. Aplicaţia ce vom da acum, constitue o mică generalizare a celor precedente.

Iată anume în ce constă: să facem în formula (III), $b_i = 1$, lăsând pe a_i arbitrar à priori, obţinem

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\,a_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} a_k\right) = n\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

sau, ceeace e tot una:

$$(12) \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} i\,a_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} a_k\right) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

şi astfel avem în relaţia (12) o formulă destul de generală, care ne dă preţioase indicaţii pentru calculul sumei $\sum_{i=1}^{n} i\,a_i$ în ipoteza cunoaşterii sumei $\sum_{i=1}^{n} a_i$ şi analoagelor ei de diferite limite superioare.

5°. Pentru a termina expunerea noastră, vom trata în acest ultim exemplu aplicativ al metodei de însumare prin părţi, un caz în care ambele elemente sumatorii, la care se referă, sunt variabile.

Ne vom raporta de astă dată la formula (II), făcând în această formulă $a_i = C_{p+i-1}^{p-1}$ şi $b_i = x^i$, C_{p+i-1}^{n-1} fiind simbolul combinărilor de $p+i-1$ obiecte luate câte $p-1$.

În acest caz numita formulă devine

$$\sum_{i=0}^{n}\left(C_{p+i-1}^{p-1}\sum_{k=0}^{i} x^k\right) + \sum_{i=0}^{n}\left(x^i\sum_{k=0}^{i} C_{p+k-1}^{p-1}\right) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) + \sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1}\,x^i$$

de unde, ţinând seama de formulele

$$(13) \qquad \sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1} = C_{p+1}^{p},$$

(14) $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

deducem:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i+1}-1}{x-1} C_{p+i-1}^{p-1} + \sum_{i=0}^{n} C_{p+i}^{p} x^i = C_{p+n}^{p}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) + \sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1} x^i$$

pentru ca desfăcând părţile componente şi regrupându-le apoi în mod convenabil, să avem pe urmă

$$\frac{1}{x-1}\sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1} + x^i \sum_{i=0}^{n} C_{p+i}^{p} x^i = C_{p+n}^{p}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) + \frac{1}{x-1}\sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1}$$

ceeace, dacă ţinem iarăşi seama de formula (13) se mai poate scrie şi sub forma

$$\sum_{i=0}^{n} C_{p+i}^{p} + x^i \frac{1}{x-1}\sum_{i=0}^{n} C_{p+i-1}^{p-1} x^i = C_{p+n}^{p}\left(\frac{x^{n+1}}{x-1}\right).$$

Or, dacă în aceasta ultimă relaţie înlocuim pe n prin $n-p$ şi introducem în plus notaţia

(15) $$\varphi_p(x) = \sum_{i=0}^{n-p} C_{p+i}^{p} x^i,$$

observând că

$$C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^{p},$$

vom avea

(16) $$\varphi_p(x) + \frac{1}{x-1}\varphi_{p-1}(x) = C_{n+1}^{p}\left(\frac{x^{n-p+1}}{x-1}\right)$$

adică, o relaţie cu recurenţă pentru suma $\varphi_p(x)$ definită prin relaţia (15) şi din care formula generală pentru calculul acestei sume se deduce apoi aşa cum am arătat în articolul *„Asupra unei însumări"*, publicat în R. M. T., Vol. XVII, pag. 110.

NOTE MATEMATICE

12. — *Un lanţ de egalităţi.*

Semnalez următorul dublu lanţ de egalităţi, curios prin el însuşi,

$$1623^k - 1622^k - (-27)^k = 799^k - 797^k - (-26)^k =$$
$$525^k - 522^k - (-25)^k = 307^k - 302^k - (-23)^k =$$
$$253^k - 247^k - (-22)^k = 147^k - 137^k - (-18)^k =$$
$$133^k - 122^k - (-17)^k = 97^k - 82^k - (-13)^k =$$
$$69^k - 47^k - (-6)^k = 63^k - 38^k - (-3)^k =$$
$$57^k - 27^k - 2^k = 55^k - 22^k - 5^k =$$
$$(-1679)^k - (-1678)^k - (-29)^k =$$
$$(-855)^k - (-853)^k - (-30)^k =$$
$$(-581)^k - (-578)^k - (-31)^k =$$
$$(-363)^k - (-358)^k - (-33)^k =$$
$$(-309)^k - (-303)^k - (-34)^k =$$
$$(-303)^k - (-193)^k - (-38)^k =$$
$$(-189)^k - (-178)^k - (-39)^k =$$
$$(-153)^k - (-138)^k - (-43)^k =$$
$$(-125)^k - (-103)^k - (-50)^k =$$
$$(-119)^k - (-94)^k - (-53)^k =$$
$$(-113)^k - (-83)^k - (-58)^k =$$
$$(-111)^k - (-78)^k - (-61)^k =$$
$$33^k + 58^k - 3^k - 22^k - 38^k, \quad k=1, 2.$$

M. G.

13. — *Asupra formulei lui Holditch.*

Se consideră o curbă închisă (C), şi o coardă constantă $MN = \lambda + \lambda'$; P fiind punctul care împarte această coardă în segmentele $PM = \lambda$ şi $PN = \lambda'$, prin mişcarea corzii MN, punctul P va descrie o curbă oarecare (C'). Aria α, cuprinsă între curbele (C) şi (C') este dată de:

$$\alpha = \pi \lambda \lambda'.$$

Într'aceasta constă formula lui *Holditch* (*Laurent* Traité D'Analyse, Tome III, pag. 79).

Dacă se notează cu S suprafaţa curbei (C) şi şi cu s aceia a curbei (C'), prin intermediul curbei anvelopă a dreptei MN, se găseşte:

(A) $$S - s = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\lambda^2 - 2\lambda r)\, d\theta = -\pi\lambda^2 + \pi\lambda(\lambda + \lambda') = \pi\lambda\lambda',$$

în care: $r = NQ$, Q reprezentând punctele unde MN atinge anvelopa sa, iar θ este unghiul pe care-l face MN cu o poziţie a sa infinit vecină.

Îmi propun, particularizând curba (C), pentru cazul când este un cerc, să dau formulei (A) o demonstrație elementară.

În acest caz, problema propusă devine:

Într'un cerc (C) se duce o coardă M N, de lungime constantă.

Un punct P al coardei, prin rotirea acesteia în interiorul cercului (C), va descrie un cerc (C') concentric cu primul. Dacă $PM=\lambda$ și $NP=\lambda'$, suprafața coroanei este dată de:

$$\alpha=\pi\lambda\lambda'.$$

Sunt trei cazuri de considerat, după cum punctul P se găsește într'o poziție oarecare față de extremitățile segmentului M N, la mijlocul sau pe prelungirea lui.

I. Fie cercul (C) și coarda M N, iar P punctul ce divide coarda dată în segmentele $PM=\lambda$ și $PN=\lambda'$. Din C se duc: perpendiculara C R și razele C N și C P, (fig. 1).

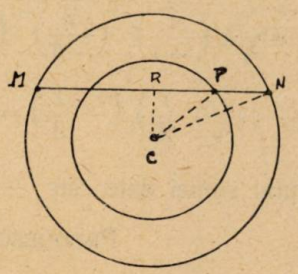


Fig. 1.

Dacă notăm cu R raza cercului (C) și cu $r=\overline{CP}$, a cercului descris de P, aria coroanei este:

$$(B)\qquad \alpha=\pi R^2-\pi r^2,$$

însă:

$$r^2=\overline{CP}^2=\overline{CR}^2+\overline{RP}^2,$$

unde:

$$(B')\qquad \overline{CR}^2=\overline{CN}^2-\overline{RN}^2.$$

Se observă că:

$$\overline{RN}=\overline{RP}+\overline{NP}\quad\text{și}\quad RP=\frac{\lambda+\lambda'}{2},$$

purtând aceste valori în (B'), obținem:

$$\overline{CR}^2=R^2-\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}-\lambda'\right)^2,\qquad (R=\overline{CN}),$$

de unde urmează:

$$r^2=R^2-\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}-\lambda'\right)^2+\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)^2.$$

Această valoare înlocuind-o în B), ne dă:

$$(A')\ \alpha=\pi\left\{R^2-\left[R^2-\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}-\lambda'\right)^2+\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)^2\right]\right\}$$

în care făcând toate reducerile, avem

$$\alpha=\pi\lambda\lambda'.\qquad \text{Q. E. D.}$$

II. Pentru cazul când P este la mijlocul corzii M N, atunci:

$$\alpha=\pi\lambda^2,\qquad (\lambda'=\lambda).$$

III. În cazul când P se găsește pe prelungirea corzii M N, (fig. 2), atunci relația (A') devine:

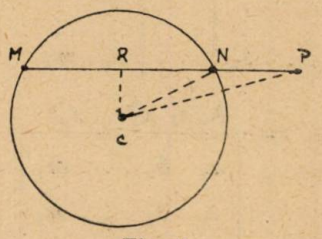


Fig. 2.

$$(A'')\quad \alpha=\pi\left[R^2-\left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}+\lambda\right)^2-R^2\right],$$

unde făcând toate reducerile, obținem

$$\alpha=\pi\lambda\lambda'.$$

Se observă cu aceasta, că formula stabilită este valabilă, oricare ar fi poziția punctului P, față de extremitățile corzii.

MIHAI BOTEZ

---

14. — *Să se afle minimul sumei:*

$$S=x+2xy+3xyz+4xyzt$$

știind că: $xy^2z^3t^4=k$ (Constant).

[V. ALACI]

Soluție. Această problemă am soluționat-o utilizând metoda multiplicatorilor.

În cele ce urmează voi utiliza o teoremă stabilită de D-l Prof. *V. Alaci* în „R. M. T", an IV, No 6, în articolul *„Aflarea directă a maximului unui produs și a minimului unei sume"*.

Teorema aceea este următoarea:

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt niște câtimi pozitive*

variabile, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, \ldots, l_n$; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *sunt nişte numere algebrice pozitive, unele putând fi şi nule şi dacă produsul*

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = ct = a,$$

atunci suma:

$$S_n = A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} +$$

$$A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} + \cdots + A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

este minimă, când avem

$$\frac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ m_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}} = \frac{A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & m_2 & \ldots & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & m_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}} = \cdots$$

$$= \frac{A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & m_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & m_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \ldots & m_n \end{vmatrix}}.$$

Valoarea minimului este dată de relaţia:

$$\text{Minim } S_n = (\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n) \sqrt[\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n]{a^{\Delta} \left(\frac{A_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{A_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \cdots \left(\frac{A_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n}},$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

iar $\Delta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, se obţine din Δ, înlocuind elementele coloanei de rangul i, respectiv prin $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

În cazul problemei propuse, observăm că:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = 2; \quad A_3 = 3; \quad A_4 = 4;$$
$$a_1 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = 0;$$
$$b_1 = 1; \quad b_2 = 1; \quad b_3 = 0; \quad b_4 = 0;$$
$$c_1 = 1; \quad c_2 = 1; \quad c_3 = 1; \quad c_4 = 0;$$
$$d_1 = 1; \quad d_2 = 1; \quad d_3 = 1; \quad d_4 = 1;$$
$$m_1 = 1; \quad m_2 = 2; \quad m_3 = 3; \quad m_4 = 4.$$

În acest caz vom avea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Vom avea deci:

$$\text{Minim } S = (-1-1-1-1+4) \sqrt[-1-1-1-1+4]{k^1 \left(\frac{1}{-1}\right)^{-1} \left(\frac{2}{-1}\right)^{-1} \left(\frac{3}{-1}\right)^{-1} \left(\frac{4}{4}\right)^4}$$

$$= k(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{k}{6}.$$

Deci minimul sumei date este $-\frac{k}{6}$.

PREDOESCU I. MARIN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, Iulie 1943.

† *Grigore C. Zamfirescu*, de *Alexandru D. Bunescu*. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu*. Mişcarea corpurilor în medii rezistente de densitate variabilă, de *Alexandru Stoenescu*. Curbura mijlocie şi liniile asimptotice, de *A. Myller*. Relaţiuni metrice în geometria triunghiului, de *Ion C. Vasiliu*. Raportul comisiei pentru decernarea premiului de geometrie elementară „*G. Ţiţeica*", de D-ra *Ţiţeica G.*, Prof. *O. N. Ţino* şi Ing. *Al. Bunescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Chestiuni de Examen*, propuse la secţia de Matematici a Facultăţii de Ştiinţe din Cluj.

Este o broşură de 80 pagini, redactată de distinsnl nostru colaborator *Ionel Stamate*, asistent pe lângă Catedra de Geometrie Analitică.

Au apărut încă 5 fascicole de acest fel şi folosul adus de ele studenţilor şi celor iubitori de matematici este de mare preţ.

3. Premiul Năsturel (4000 lei).

Lucrarea d-lui prof. *Alaci*: „Coordonate rombice". Raportul[1] d-lui prof. *Pompeiu*.

1. D-l. *V. Alaci*, profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara, şi-a consacrat de mai mulţi ani o parte a activităţii sale ştiinţifice unor cercetări de caracter special — care au atras asupra sa atenţia, nu numai în ţară, a colegilor săi de specialitate — dar şi în străinătate a unor matematicieni de seamă.

Urmărind cu stăruinţă şi cu deosebit talent un gen bine definit de chestiuni, d-l. *Alaci* a ajuns la acea stăpânire deplină a materiei şi la acea cunoaştere clară a amănuntelor — care sunt totdeauna rodul unei îndelungate meditări şi serioase cercetări.

2. Lucrarea pe care o prezintă acum *Academiei* stă pe aceiaşi linie a preocupărilor d-lui *Alaci*.

Precum se ştie coordonatele sunt, în Geometria Analitică, instrumentele de lucru ale cercetătorului şi e prea bine cunoscut că aceste instrumente sunt: şi variate, şi fiecare întrebuinţate după împrejurările în care pot fi mai utile.

D-l *Alaci* observă, el însuş, în introducerea la lucrarea sa, că: un nou sistem de coordonate nu şi-ar putea legitima rostul de cât prin utilitatea lui în anumite chestiuni de Geometrie.

Configuraţiile geometrice, cu a căror reprezentare de multă vreme se ocupă d-l *Alaci*, l'au adus, în mod firesc, la concepţia „coordonatelor rombice" — iar o dovadă mai mult că aceste coordonate işi iau locul lor, printre instrumentele de cercetare în Geometria Analitică, e faptul că, abia introduse de d-l *Alaci*, ele au şi fost folosite de d-nii: *Ţino* şi *Abramescu* în anumite chestiuni interesante de Geometrie.

3. Dacă acum, de la *fondul* ştiinţific al lucrării trecem la *forma* de expunere — trebue să semnalăm, la d-l *Alaci*, o grijă deosebită în scriere şi anume acea structură de frază, a cărei formă aleasă se face numai decât remarcată.

4. O a doua lucrare, de întindere mai restrânsă, în cartea d-lui *Alaci*, este întitulată: *relaţiuni metrice într'un triunghiu*.

Este o lucrare de deosebit interes şi asupra căreia se cuvine să insistăm.

Există, în literatura matematică universală o culegere de formule: *relations entre les éléments d'un triangle*, Paris: *Vuibert* — un extrem instrument de lucru, pentru orce matematician. Formulele (în număr de 293: citez, după o ediţie mai veche) sunt înşirate, apoi demonstrate — dar metodele de demonstraţie variind de la o formulă la alta, uneori nefiind de cât simple artificii — vădesc prea mult, şi uneori în mod neplăcut, lipsa unui fir conducător.

D-l *Alaci*, inspirându-se dela ideia utilizării vectorului plan (lungime şi înclinare) în Geometrie: ne dă, prin bogata lui colecţie de formule asupra triunghiului — nu numai o colecţie preţioasă dar şi un model de unitate a metodei ceia ce e, un îndemn pentru alţi cercetători iar, din punct de vedere didactic, un preţios avantaj.

5. În rezumat: activitatea ştiinţifică a d-lui prof. *Alaci* este demnă de atenţiunea *Academiei Române* — iar lucrarea pe care d-sa o prezintă merită, cu prisosinţă, premiul la care a fost înscrisă.

D. POMPEIU

4. *D. Pompeiu*, Un problème de Géometrie. (Extrait du „Bulletin Scientifique de L'Ecole Polytechnique de Timişoara, T. 11, Fasc. 3—4.)

5. *Petre Sergescu*. Şcoala astronomică din Cracovia în veacul al XV-lea. (Extras din R. M. T., An. XXIII, No 5)

[1]) Acest raport a fost trimis spre publicare de D-l Prof. *Pompeiu*.

6. *Michel Ghermănescu*. Sur une équation fonctionnelle qui caractérise des polynomes. (Mathematica, Vol. XIX, 1943).

7. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les courbes de *Tzitzeica* (Mathematica Vol. XIX, 1943).

8. *I. Stamate*. O problemă de aplicaţii Geometrice ale Analizei Matematice. (Extras din R. M. T., An. XXIII, No. 5).

9. *M. Stephenson* und *I. Predoescu* Eine Methode zur Berechnung des Ölvolumens einer Lagerstätte in einer zusammenhängenden technischen Einheit. (Sonderdruck aus Oel und Kohle, 1943).

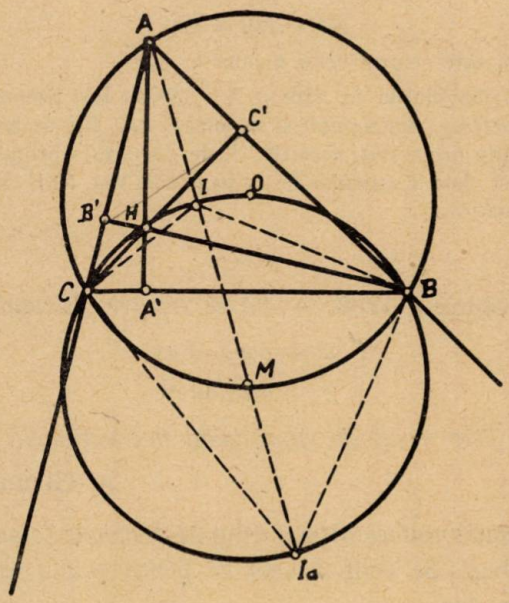
PROBLEME REZOLVATE

Problema 961. — *În triunghiul* A B C *avem* $\sphericalangle A = 60^0$. *Să se arate că vârfurile* B, C, *ortocentrul, centrele cercurilor circumscris, înscris şi exînscris în unghiul* B A C *sunt şase puncte conciclice şi reciproc dacă cele şase puncte sunt conciclice avem* $\sphericalangle A = 60^0$.

C. COSNITA

Fie H, D, I, I_a ortocentrul şi centrele celor trei cercuri din enunţ. Unghiul A fiind de 60^0 arcul C M B este de 120^0 şi atunci unghiul la centru C O B este tot de 120^0. A', B', C' fiind picioarele înălţimelor, din patrulaterul înscriptibil A B' H C' se deduce că

$$\sphericalangle CHB = 120^0.$$



Apoi în triunghiul C I B avem

$$\sphericalangle CIB = \pi - \frac{1}{2}(B+C) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - A) = 120^0.$$

Am demonstrat deci că dacă $\sphericalangle A = 60^0$, atunci

$$\sphericalangle CHB = \sphericalangle CIB = \sphericalangle COB = 120^0,$$

ceia ce arată că C, H, I, O, B sunt conciclice. Unghiurile ICI_a şi IBI_a fiind drepte, din patrulaterul IBI_aC rezultă că $\sphericalangle CI_aB = 60^0$, deci şi I_a se află pe cercul precedent.

Reciproc, să presupunem că C, H, I, O, B, I_a sunt conciclice şi să căutăm valoarea unghiului A. În adevăr, ori care ar fi valoarea lui A, avem

$$\sphericalangle CIB = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} \quad \text{şi} \quad \sphericalangle COB = 2A.$$

Dacă cele 6 puncte sunt conciclice, atunci

$$\sphericalangle CIB = \sphericalangle COB = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} = 2A.$$

$$\sphericalangle A = 60^0.$$

Notă. 1° Au trimis foarte bune soluţii analoage D-nii: *Bâcicov B., Ivănescu C., Lăţea P. C, Mihăileanu N. N., Purdilă A. şi Süli M.*

2° Dacă M este intersecţia cercului O cu AII_a se observă că

$$\overline{MC} = \overline{MB}$$

ca subîntinzând arce egale. Apoi

$$\sphericalangle MCI = \frac{A+C}{2} = \sphericalangle CIM$$

$$\overline{MC} = \overline{MB} = \overline{MI}$$

deci M este centrul celor 6 puncte.

3° Triunghiurile în care $\sphericalangle A = 60^0$ au fost numite de *E. Woeffing, semiregulate* şi se notează Δ_{60}. Ele se bucură de multe proprietăţi speciale. Unele din aceste proprietăţi au fost date în articolul de la pag. 473, Vol. XLI, Gazeta Matematică.

G-l Gh. B.

Problema 1788. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^4 \\ x^2 + b\,x\,z = v^2. \end{cases}$$

Se cere o soluţie cuprinzând trei parametri.

A. GLODEN

Soluţia autorului şi a d-lui *Mahrenholz Johannes* (Cottbus). Se verifică uşor că pentru prima ecuaţie putem lua

$$(1) \quad x = m^4, \quad y = 4m^3n + 6am^2n^2 + 4a^2mn^3 + a^3n^4,$$

$$u = m^2 + amn,$$

iar pentru ecuaţia 2-a putem lua

$$x = q^2, \quad z = 2pq + bp^2, \quad v = q^2 + bpq.$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, trebuie să avem

$$q = m^2,$$

astfel că valorile lui z şi v devin

$$(2) \quad z = 2m^2p + bp^2, \quad v = m^4 + bm^2p.$$

Relaţiile (1) şi (2) dau astfel sistemul de soluţii, al sistemului de ecuaţii dat, cuprinzând trei parametri arbitrari.

Exemple: 1°. Pentru $a = 3$, $b = 5$ şi luând $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, avem

$$\begin{cases} 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 800 = 7^4 \\ 1^2 + 5 \cdot 1 \cdot 51 = 16^2. \end{cases}$$

2°. Pentru $a = 1$, $b = 7$ şi luând $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, avem

$$\begin{cases} 16^2 + 16 \cdot 65 = 6^4 \\ 16^2 + 7 \cdot 87 = 100^2 (= 10^4). \end{cases}$$

Acest exemplu procură o soluţie numerică pentru sistemul

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^4 \\ x^2 + b\,x\,z = v^4. \end{cases}$$

O soluţie analoagă a fost dată de *Jidanu I. C-tin* (Polit., Timişoara), care a folosit cunoştinţele din Nota 1, a d-lui *A. Gloden*, din R. M. T., Vol. XVIII, p 7, unde este studiat sistemul mai general

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^k \\ x^2 + b\,x\,z = v^l. \end{cases}$$

Problema 1830. — *Se consideră trapezul* ABCD, *dreptunghic în* A *şi* D.

Presupunând că vârful A *rămâne fix în timp ce latura* BC, *constantă ca mărime alunecă pe direcţia* BC *într'un sens sau altul, se cere să se arate că:*

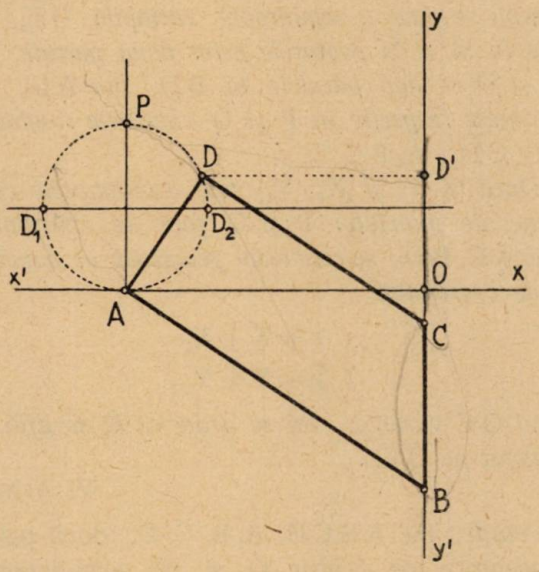
1. *Baza* DC *trece printr'un punct fix.*
2. *Aria triunghiului* ADB *rămâne constantă.*
3. *Dintre toate trapezele* ABCD, *să se construiască acela care are o arie maximă sau minimă.*

VASILE VASU

Soluţie geometrică dată de autor. Fie ABCD un trapez cu unghiurile din A şi D drepte.

1. Din A, spre baza DC, ducem un segment de dreaptă AP egal şi paralel cu latura BC. Punctul P se va găsi pe latura DC, fiindcă figura ABCP este un paralelogram.

Acest punct P este însă fix, căci BC este constant în direcţtie şi mărime.



2. Aria triunghiului ADB este $\frac{AD \times AB}{2}$, expresie care trebuie să arătăm că este constantă.

Pentru aceasta ducem AO perpendiculară pe BC şi observăm că triunghiurile dreptunghice ADP şi AOB sunt asemenea, având $\sphericalangle APD = \sphericalangle ABO$, fiind unghiuri opuse într'un paralelogram.

Triunghiurile ADP şi AOB fiind asemenea, rezultă

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AP}{AB}$$

deci

$$AD \times AB = AO \times AP = \text{const},$$

fiindcă AO şi AP sunt constante.

Astfel, aria triunghiului ADB este constantă.

3. Aria trapezului ABCD, se compune din ariile a două triunghiuri, anume

$$(ABCD) = (ADB) + (DBC)$$

Cum aria triunghiului ADB am arătat că este constantă, iar aria triunghiului DBC fiind $\frac{BC \times DD'}{2}$, (DD' perpendiculara din D pe BC), rezultă că maximul sau minimul ariei trapezului ABCD, are loc în acelaşi timp cu maximul, sau minimul lui DD', (BC fiind constant).

Observăm însă că punctele A şi P fiind fixe, iar $\sphericalangle D = 90^0$ locul punctului D este cercul descris pe AP ca diametru.

Ducând pe AP, în mijlocul ei, o perpendiculară, ea va tăia cercul în punctele D_1 şi D_2, cel mai îndepărtat şi cel mai apropiat punct de pe cerc faţă de BC, după cum se ştie.

D_1 este poziţia punctului D pentru care aria trapezului ABCD este maximă, iar D_2 este poziţia punctului D pentru care aria trapezului ABCD este minimă. Ducând în A şi D_1, sau în A şi D_2 perpendiculare pe AD_1, sau AD_2, până întâlnesc pe BC, avem trapezul cerut în poziţia sa de maxim, sau minim.

Pe o figură a parte se poate urmări cu uşurinţă cazurile particulare când cercul descris pe AP ca diametru ar fi tangent, sau secant faţă de latura BC.

Soluţie analitică. Alegem pe BC ca axă $y'y$ şi perpendiculara din A pe ea, ca axă $x'x$, O fiind origina.

Coordonatele punctului A fiind $(a, 0)$, ecuaţiile dreptelor AB şi AD sunt respectiv

$$(1)\ (AB) \equiv y = \lambda(x-a), \quad (2)\ (AD) \equiv y = -\frac{1}{\lambda}(x-a),$$

unde $a < 0$ este dat, iar λ este variabil.

Notând $\overline{BC} = k$ (constant), observăm din (1) că $(0, -a\lambda)$ sunt coordonatele lui B şi atunci coordonatele punctului C sunt $C(0, -a\lambda + k)$.

1. Ecuaţia dreptei DC este, prin urmare

$$y - k + a\lambda = \lambda x,$$

care se mai poate scri

$$(3) \qquad (DC) \equiv y - k - \lambda(x - a) = 0.$$

Când λ variază, această dreaptă trece prin punctul fix $P(a, k)$ şi astfel este stabilit că DC trece printr'un punct fix.

2. Coordonatele punctului D, se obţin rezolvând ecuaţiile (2) şi (3) ale dreptelor AD şi DC şi se găseşte cu uşurinţă

$$D\left(a - \frac{k\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{k}{1+\lambda^2}\right).$$

Apoi distanţa AD, de la A la dreapta DC, este

$$\overline{AD} = \frac{k}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

iar

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + a^2\lambda^2} = \left| a\sqrt{1+\lambda^2} \right|.$$

Putem astfel scri:

$$(4)\ \text{aria}(A\,D\,B)=\frac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{2}=\frac{|a\sqrt{1+\lambda^2}|k}{2\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{|ak|}{2}.$$

De aci deducem că aria triunghiului A D B este constantă, nedepinzând de λ.

3. Ţinând seamă de (4) şi de faptul că,

$$\text{aria}(B\,C\,D)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & -a\lambda\\ 1 & 0 & k-a\lambda\\ 1 & a-\frac{\lambda k}{1+\lambda^2} & \frac{k}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & k\\ 1 & 0 & k-a\lambda\\ 1 & a-\frac{\lambda k}{1+\lambda^2} & \frac{k}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{k}{2}\left(\frac{\lambda k}{1+\lambda^2}-a\right),$$

putem scri:

$$\text{aria}(A\,B\,C\,D)=\text{aria}(A\,D\,B)+\text{aria}(B\,C\,D)=$$

$$|ak|+\frac{\lambda k^2}{2(1+\lambda^2)},$$

care variază cu λ.

Maximul, sau minimul ariei trapezului A B C D, are loc simultan cu maximul, sau minimul funcţiei

$$y=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Cum derivata, care este

$$y'=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

se anulează pentru $\lambda=1$ (trecând dela pozitiv la negativ) şi pentru $\lambda=-1$ (trecând de la negativ la pozitiv), rezultă că pentru $\lambda=1$, aria cerută este maximă şi pentru $\lambda=-1$, aria cerută este minimă.

În cazul maximului, A B face cu Ox un unghiu de 45^0, iar în cazul minimului A B face cu Ox un unghiu de -45^0.

Trapezul A B C D este uşor de construit în aceste cazuri, şi rezultatele coincid cu acelea din soluţia geometrică.

Soluţii bune date de d-ra *Mang Ileana* (studentă, Timişoara) şi de d-nii: *Radoslav I. Gh* (lic., Lugoj) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1831. — *Se dau patratele concentrice* A B C D, $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ *şi din* O *centrul lor comun se duce o semidreptă variabilă* O E, *care taie în* M *şi* N *conturele celor două patrate. Din* M *şi* N *se duc paralele la* B D *sau* A C, *care întâlnesc respectiv în* P *şi* Q *conturele romburilor* $A\,B_1\,C\,D_1$, $A_1\,B\,C_1\,D$.

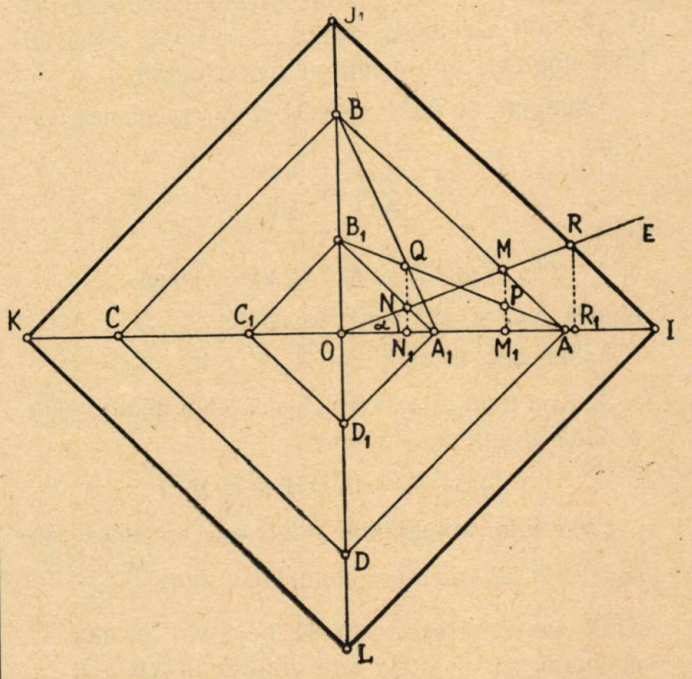
Dacă (X, Y) *şi* (X_1, Y_1) *sunt coordonatele carteziene ale punctelor* P *şi* Q *faţă de sistemul de axe* (A C, B D), *se cere locul geometric al punctului* R *de coordonate*

$$\begin{cases} x=X+X_1\\ y=Y+Y_1, \end{cases}$$

când O E *variază. Să se arate că* R *se află necontenit pe* O E.

V. ALACI

Soluţie. Fie A B C D, $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ două patrate concentrice de centru O şi de semidiagonale, respectiv, a, b şi trasăm romburile $A\,B_1\,C\,D_1$, $A_1\,B\,C_1\,D$. Ducem apoi dreapta variabilă O E, ($\alpha=\sphericalangle A\,O\,E$) şi fie M, N intersecţiile ei, respectiv,



cu conturele patratelor date; fie apoi P, Q intersecţiile lui $M\,M_1$, $N\,N_1$ (paralele cu B D), respectiv cu romburile $A\,B_1\,C\,D_1$, $A_1\,B\,C_1\,D$.

1. Dacă (X, Y), (X_1, Y_1) sunt coordonatele punctelor P şi Q, să căutăm a afla locul punctului R de coordonate

$$(1) \qquad \begin{cases} x = X + X_1 = O M_1 + O N_1 \\ y = Y + Y_1 = M_1 P + N_1 Q, \end{cases}$$

când α variază. Vom folosi în acest scop cunoştinţi de *Trigonometrie patratică*. În adevăr, în triunghiurile dreptunghice $O M_1 M$, $O N_1 N$, *teorema 1-a* de la triunghiurile dreptunghic din *Trig. patratică*, p. 42, ne dă

$$O M_1 = (O M_1 + M_1 M)\, cp\, \alpha = (O M_1 + M_1 A)\, cp\, \alpha,$$

$$O N_1 = (O N_1 + N_1 N)\, cp\, \alpha = (O N_1 + N_1 A)\, cp\, \alpha,$$

sau

$$(2) \qquad X = a\, cp\, \alpha, \qquad X_1 = b\, cp\, \alpha.$$

Apoi, din asemănarea triunghiurilor $A M_1 P$, $A O B_1$ şi $A_1 N_1 Q$, $A_1 O B$, deducem

$$\frac{M_1 P}{O B_1} = \frac{M_1 A}{O A}, \qquad \frac{N_1 Q}{O B} = \frac{N_1 A}{O A_1},$$

sau

$$\frac{Y}{b} = \frac{a - X}{a}, \qquad \frac{Y_1}{a} = \frac{b - X_1}{b}$$

şi ţinând seamă de (2), şi de faptul că $1 - cp\, \alpha = sp\, \alpha$, găsim

$$(3) \qquad Y = b\, sp\, \alpha, \qquad Y_1 = a\, sp\, \alpha.$$

Înlocuind valorile din (2) şi (3) în (1), avem

$$(4) \qquad \begin{cases} x = (a + b)\, cp\, \alpha \\ y = (a + b)\, sp\, \alpha. \end{cases}$$

Aceste relaţii sunt valabile în orice cadran ar fi α, cum uşor se poate invedera.

Prin urmare, *locul punctului* R, *de coordonate* (x, y) *date de* (4), *este patratul* I J K L *de semidiagonală* $O I = a + b$, conform problemei de sub No 161 din *Trigonometria patratică*, p. 166.

2. Dacă însemnăm R_1 intersecţia lui O E cu patratul I J K L, coordonatele lui, (x_1, y_1), sunt date de relaţiile,

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = (a + b)\, cp\, \alpha \\ y_1 = (a + b)\, sp\, \alpha, \end{cases}$$

cum uşor se deduce din triunghiul dreptunghic $O R_1' R$, în virtutea *teoremei 1-a*, din *Trig. patratică*.

Din relaţiile (5) şi (4), rezultă că punctul R, coincide cu R, că prin urmare R se află tot timpul pe O E.

Soluţie analoagă dată de d-l *Cetăţeanu Stelian* (Polit., Bucureşti).

Soluţie analitică. Considerăm figura de mai sus, în care A C şi B D sunt axele. 1. Ecuaţia dreptei variabile O E este $y = m x$.

Punctul M este intersecţia dreptelor O E şi A B

$$(O E) \equiv y = m x, \qquad (A B) \equiv x + y = a,$$

deci coordonatele lui sunt

$$M\left(\frac{a}{1+m}, \frac{m a}{1+m}\right).$$

Punctul N este intersecţia dreptelor O E şi $A_1 B_1$,

$$(O E) \equiv y = m x, \qquad (A_1 B_1) \equiv x + y = b,$$

deci coordonatele lui sunt

$$N\left(\frac{b}{1+m}, \frac{m b}{1+m}\right).$$

Punctul P este intersecţia dreptelor $M_1 M$, $A B_1$,

$$(M_1 M) \equiv x = \frac{a}{1+m}, \qquad (A B_1) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

deci coordonatele lui sunt

$$P\left(X = \frac{a}{1+m}, \quad Y = \frac{b m}{1+m}\right).$$

Punctul Q este intersecţia dreptelor $N_1 N$, $A_1 B$,

$$(N_1 N) \equiv x = \frac{b}{1+m}, \quad (A_1 B) \equiv \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1,$$

deci coordonatele lui sunt

$$Q\left(X_1 = \frac{b}{1+m}, \quad Y_1 = \frac{m a}{1+m}\right).$$

Astfel, având coordonatele punctelor P şi Q, în funcţie de parametru variabil m, rezultă că coordonatele (x, y) ale punctului R, care prin ipoteză sunt

$$\begin{cases} x = X + X_1 \\ y = Y + Y_1, \end{cases}$$

devin conform valorilor aflate pentru (X, Y), (X_1, Y_1),

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a + b}{1 + m} \\ y = \dfrac{(a + b)\, m}{1 + m}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul m din aceste relații, obținem

$$x + y = a + b.$$

Această ecuație reprezintă dreapta I J din care vom reține pentru locul geometric a lui R numai segmentul I J.

Cum pentru poziții simetrice a lui O E față de axele A C, B D, corespund poziții simetrice pentru R, *rezultă că locul geometric complet a lui* R, *când* O E *variază, este patratul* I J K L.

2. Că punctul R se află pe O E, rezultă din faptul că coordonatele lui date de (6), verifică ecuația lui O E, $y = m\,x$, cum ușor se poate constata.

Soluții analoage date de d-nii: *Boleanțu Lazăr* (Poliit., Timișoara) și *Cetățeanu Stelian* (Polit., București).

Observare. Pe când în prima metodă, unde am folosit cunoștințî de *Trigonometrie patratică,* am aflat cu preciziune locul lui R, dat de ecuațiile (4, care reprezintă patratul I J K L, prin metoda analitică, numai folosind intuiția geometrică am aflat locul lui R.

Rezultă astfel avantajul incontestabil a primei metode față de a 2-a în unele probleme, cum este cea tratată mai sus.

PROBLEME PROPUSE

2154. — Să se găsească un patrat de patru cifre a cărui rădăcină patrată să fie egală cu suma grupelor de două cifre a numărului inversat.

V. THÉBAULT

2155. — Se cer două numere de forma $a\,b\,c\,d$ și $b\,0\,b$ al căror produs este de forma $c\,0\,d\,c\,c\,c$, știind că $a + b + c = d = 2c$.

LIVIU GROZESCU

2156. — Să se determine λ din ecuația

$$(4\lambda^2 - 2\lambda + 4)\,x^2 - (5\lambda^2 - 3\lambda - 2)\,x - \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0,$$

știind că dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile, avem relația

$$\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} \frac{2(x_1 + x_2)}{5(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 - 3}.$$

Având valoarea lui λ, să se rezolve ecuația dată.

IOAN ANTON

2157. — Să se afle aria și volumul solidului obținut prin reunirea celor două conuri circulare drepte de rază r ce se pot înscrie într'o sferă de rază R.

Aplicație: $R = 9$ cm; $r = 7$ cm.

EUGEN VISA

2158. — Fie $O\,x$, $O\,y$ doi diametri perpendiculari în cercul O și F un punct fix pe $O\,x$. O tangentă T la cercul O, întâlnește pe $O\,y$ în M. Se cere:

1°. Locul intersecției lui M F cu tangentele la O, perpendiculare pe T.

2°. Locul intersecției lui T cu tangentele la O, perpendiculare pe M F.

G-L GH. BUICLIU

2159. — O dreaptă P Q de lungime constantă d, se reazămă pe laturile O A și O B ale unghiului constant $AOB = 2\alpha$, P fiind pe O A și Q pe O B. Se duce din P și Q câte o perpendiculară respectiv pe bisectoarea interioară și exterioară a unghiului A O B, care perpendiculare se întersectează în M. Care este locul geometric al lui M, când poziția dreptei P Q variază?.

LT. MARIN ȘTEFANESCU

2160. — Să se găsească conficientul lui $\cos^6 x$ din dezvoltarea expresiei

$$E = \sum_{1}^{10} \cos^2 n\,x.$$

după puterile lui $\cos x$.

ADRIAN I. POPESCU

2161. — Intr'un triunghiu oarecare A B C, în care notațiile sunt cele obicinuite, să se stabilească relația

$$a^2 \operatorname{cotg} A \cos^2 B - b^2 \operatorname{cotg} B \cos^2 A = a\,b \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \sin(A - B).$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Anton Ioan, (382, 1869, 1894, 1917, 1989, 2025, 2056, 2094, 2103, 2106, 2113, 2116, 2132, 2138, 2143, 2145, 2148, 2150, 2151); *Bosie Boris*, (1898, 1906, 1938, 1956, 2026, 2050, 2090, 2098); *Catariu D. Marcel*, (P; 2023, 2123, 2124, 2129, 2130, 2135, 2139, 2143, 2144, 2145); *Constantinescu N. Ilie*, (2115, 2121, 2130, 2145); *Gâţă Gh. Cheorghe*, (P; 1835, 1915, 1969, 2074, 2081, 2092, 2097, 2106, 2107, 2113, 2115, 2120, 2139); *Gloden A.*, (N.); *Godea Ioan*, (1728, 1770, 1784, 1858, 1874, 2106, 2110, 2113); *Iacob Şt. Eugen*, (P; 1955, 1979, 2145); *Ionescu C. Victor*, (2145); *Ionescu F. Petre*, (2098, 2113, 2120); *Iosifescu Cicerone*, (1993, 1998, 2084, 2110); *Iofanu Teofil*, (2038, 2052, 2067); *Knopf Hermann*, (P; 2135); *Lupescu Corneliu*, (2023, 2077, 2082, 2084, 2086 2087, 2088, 2098, 2107, 2115, 2120, 2124, 2134, 2145): *Maliţa A. Mircea*, (2137, 2120); *Matieş V. I.* (A; N; P.); *Sabău Gh. Mihai*, (P; 1952, 1975, 1993, 2120, 2124, 2135, 2150, 2151) *Stretea Alexandru*, (1981, 2025, 2031, 2038, 2043, 2054, 2056, 2059, 2060, 2078, 2085, 2086, 2087, 2103, 2107, 2113); *Tica P. Marin*, (2098, 2120, 2145); *Tincu C. C-tin.*, (2120, 2123, 2130, 2148); *Vişa Eugen*, (P; 2071); *Wegener Eugen*, (P; 1493, 1553, 1568, 1640, 1656, 1697, 1789, 1865, 1886, 1897, 1914, 1967, 2023, 2105, 2108, 2116, 2143, 2144, 2145, 2150); *Zavate Victor*, (1895, 1956, 1962, 1987, 2001).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue.

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu*, prof. Universitar, Str. Milano 2, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu*, elev, Strada Petru Raş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez*, Strada Emanoil Albu 7, Piatra Neamţ.
5. Sub-Lt *Moisă I. Gheorghe*. Adresa: *Agripina Moisă*, Str. Ştefan cel Mare No. 242, Roman.
6. *Petre F. Ionescu*. Strada Severinului No. 76, Craiova.
7. *Ioan N. Gligor*. Aliuş, Jud. Timiş-Torontal.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim rugăm a nu ni se mai trimete, deocamdată, abonamente.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXII, cu preţul de lei 300 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi marazilor lor.

Figurile ce însoţesc soluţiile probl[illegible]or, notelor şi articolelor, trebuesc desenate posibil în tuş. jire pe foi albe (neliniate) şi de

ANUL XXIII. SEPTEMVRIE 1943 No. 7.

BIBLIOTECA CENTRALA UNIVERSITARA SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **M. GHERMANESCU**: ASUPRA METODEI PARTILOR PROPORTIONALE.
2. **EUGEN VISA**: ASUPRA UNOR INSUMARI.
3. NOTE MATEMATICE 15, 16, 17, 18
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 858, 1771, 1790, 1829, 1835, 1850.
6. PROBLEME PROPUSE: 2162–2169.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasă

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu plăcere că de la 15 Septembrie 1943, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" D-l Inginer *Marin Predoescu*, Astra-Română, Câmpina, un fost harnic şi distins corespondent al revistei noastre.

„R. M. T." aduce vii mulţumiri D-lui Ing. *Marin Predoescu* pentru suma donată, două mii Lei.

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 7 TIMISOARA, SEPTEMVRIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politehnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN
Şcoala Politehnică, Timişoara.

ASUPRA METODEI PĂRŢILOR PROPORŢIONALE [1]

DE

M. GHERMĂNESCU.

Se ştie că pentru calculul aproximativ al rădăcinii unei ecuaţii algebrice sau transcedente $f(x)=0$, cuprinsă într'un interval în prealabil determinat (a, b), în care $f(x)$ este continuă, se întrebuinţează, între altele, *metoda părţilor proporţionale*, care se bazează pe ipoteza neexactă, dar aproximativă, următor căreia creşterile funcţiunii $f(x)$ în două intervale destul de restrânse sunt proporţionale creşterilor variabilei x în aceleaş intervale. Dacă deci h este cantitatea ce trebue adăugată lui a pentru a obţine rădăcina presupusă a ecuaţiei date, aplicarea ipotezei de mai sus, intervalelor (a, b), $(a, a+h)$ conduce la egalitatea aproximativă

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

din care se deduce, cu ipoteza $f(a+h)=0$,

$$h=-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}>0,$$

obţinându-se astfel pentru rădăcina ecuaţiei date, cuprinsă între a şi b, valoarea aproximativă $a_1=a+h$. Poziţia acestei rădăcini în raport cu adevărata rădăcină x_0, se precizează apoi, în cazul când derivata a doua $f''(x)$ păstrează un semn constant în tot intervalul, observând că $f(a_1)$ este de semn contrar cu $f''(x)$.

În tratatele de Algebră mai cunoscute, se spune apoi că operaţia se poate repeta cu noul interval, obţinându-se în acest mod aproximaţiuni din ce în ce mai bune pentru rădăcină. Nu am găsit însă dovedită această afirmaţiune, deşi demonstraţia sa nu este atât de dificilă. Cu atât mai mult, mă miră lipsa acestei demonstraţii, cu cât ea este făcută pentru altă metodă de aproximaţie (metoda lui *Newton*), lipsă ce îmi propun să acoper în rândurile de mai jos.

Voi demonstra deci, că în cazul când derivata $f''(x)$ păstrează acelaş semn în tot intervalul (a, b), aproximaţiunile succesive, date de metoda părţilor proporţionale, se apropie neîncetat de adevărata rădăcină x_0 a ecuaţiei $f(x)=0$, cuprinsă în intervalul dat, tinzând la limită chiar către rădăcina x_0.

Derivata $f''(x)$ putând fi pozitivă sau negativă, iar pe de altă parte, din condiţia $f(a)f(b)<0$, $f(a)$ putând fi de asemeni pozitivă sau negativă, vom avea de examinat patru cazuri distincte, după semnele pe cari le pot avea $f(a)$, $f''(x)$, cazuri ce se reduc însă numai la două.

I. $f''(x)>0$, $f(a)<0$. Urmează $f(b)>0$, $f(a_1)=f(a+h)<0$, deci rădăcina x_0 se află cuprinsă între a_1 şi b. Aplicând metoda părţilor proporţionale acestui interval, vom obţine

$$a_2=a_1+h_1=a_1-\frac{(b-a_1)f(a_1)}{f(b)-f(a_1)}$$

şi, în virtutea ipotezelor făcute, $a_2>a_1$, $f(a_2)<0$. Urmează că rădăcina adevărată se află între a_2 şi b. Continuând operaţiunea cu noile intervale ce se obţin succesiv, vom obţine aproximaţiunile succesive $a_3, a_4, \ldots, a_n$, astfel încât

$$a<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots b.$$

Şirul (a_n) fiind crescător şi limitat superior, are o limită λ, care se confundă cu rădăcina x_0 a ecuaţiei $f(x)=0$, cuprinsă în intervalul (a, b). În adevăr, din $\lim a_n=\lambda$ rezultă

$$\lim f(a_n)=f(\lim a_n)=f(\lambda).$$

Nu se poate ca $\lambda=\lim a_n=b$, deoarece ar urma $f(\lambda)=f(b)$, ceia ce conduce la $f(b)=0$, căci $f(a_n)$

[1] Comunicată la Asociaţia profesorilor de matematici din Timişoara, Ianuarie 1936.

fiind negativă, limita este negativă sau nulă; cum de altă parte $f(b) > 0$, egalitatea $f(\lambda) = f(b)$ conduce la $f(b) = 0$, ceia ce este exclus, căci b nu este rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Acestea stabilite, putem apoi scrie

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(b - a_n) f(a_n)}{f(b) - f(a_n)}.$$

Șirul (a_n) având o limită λ, primul membru al egalității de mai sus tinde către zero, în virtutea unei teoreme a lui *Cauchy*; urmează aceiaș limită și pentru membrul al doilea, adică

$$\lim \frac{b - a_n}{f(b) - f(a)} \cdot f(a_n) = 0.$$

De oarece $\lim (b - a_n) \neq 0$, $\lim [f(b) - f(a_n)] \neq 0$, urmează

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(\lambda) = 0,$$

adică λ este o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$. Cum singura rădăcină a acestei ecuații în intervalul (a, b) este x_0, urmează $\lambda \equiv x_0$, iar afirmațiunea noastră este astfel demonstrată în ipoteza făcută.

II. $f''(x) > 0$, $f(a) > 0$. Urmează $f(b) < 0$, $f(a_1) = f(a + h) < 0$, deci rădăcina x_0 se află cuprinsă între a și a_1. Aplicând metoda părților proporționale acestui interval, vom obține rădăcina aproximativă $a_2 = a + h_1$, unde

$$h_1 = -\frac{(a_1 - a) f(a)}{f(a_1) - f(a)} = -\frac{h f(a)}{f(a_1) - f(a)} = \frac{h f(a)}{f(a) - f(a_1)} < h,$$

căci numitorul este mai mare decât $f(a)$.

De oarece $f(a_2) < 0$, rădăcina x_0 va fi cuprinsă între a și a_2. Repetând operațiunea, vom obține aproximațiunile succesive $a_3, a_4, \ldots, a_n$, astfel ca

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n \cdots > a.$$

Șirul (a_n) fiind descrescător și limitat inferior, are o limită λ, care se confundă cu rădăcina x_0 a ecuației $f(x) = 0$, cuprinsă în intervalul (a, b). În adevăr, ca la primul caz, arătăm că $\lambda \neq a$, căci în cazul contrar $f(a) = 0$, ceia ce este exclus căci a nu este rădăcină.

Apoi, dacă $\lim a_n$ există, de oarece $a_n = a + h_{n-1}$, rezultă că există și $\lim h_{n-1} = \lim h_n \neq 0$, căci altfel $\lim a_n = a$, ceiace am arătat că este exclus. Ori din

$$h_n = \frac{(a_n - a) f(a)}{f(a) - f(a_n)} = \frac{h_{n-1} f(a)}{f(a) - f(a_n)},$$

rezultă

$$h_n = \frac{h f^n(a)}{[f(a) - f(a_1)][f(a) - f(a_2) \ldots [f(a) - f(a_n)]}$$

și cum h_n are o limită finită și diferită de zero, urmează că și produsul infinit

$$P_n = \left[1 - \frac{f(a_1)}{f(a)}\right]\left[1 - \frac{f(a_2)}{f(a)}\right] \cdots \left[1 - \frac{f(a_n)}{f(a)}\right]$$

are o limită finită și diferită de zero. Dar condiția necesară pentru existența acestei limite este

$$\lim \frac{f(a_n)}{f(a)} = 0$$

și cum $f(a)$ este finit, urmează $\lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(\lambda) = 0$, de unde $\lambda \equiv x_0$.

ASUPRA UNOR ÎNSUMĂRI

DE

EUGEN VIȘA.

Într'o ordine de idei conexă celeia vizată în prima parte din cuprinsul articolului cu același titlu, publicat în G. M., Vol. XLIV, pag. 517, ne propunem a stabili o formulă generală pentru calculul sumelor:

$$(I) \qquad \boxed{S_n^m(p, q) = \sum_{i=0}^{m} C_p^i C_q^{n-1} a_i},$$

unde simboalele C_p^i și C_q^{n-i} reprezintă respectiv numerele combinărilor de p obiecte luate câte i și de q obiecte luate câte $n - i$, a_i fiind termenul de rang i al unei progresii aritmetice de ordinul m.

Pentru scopul urmărit, vom proceda analog cazului corespunzător din numitul articol, plecând și de astă dată dela relația

$$(1) \qquad a_i = \sum_{k=0}^{m} C_i^k \Delta^k a_0,$$

în care $\Delta^k a_0$ este diferența de ordinul k a termenului inițial a_0 al progresiei aritmetice considerate.

Având în vedere această relație, vom putea scrie succesiv:

$$S_n^m(p, q) = \sum_{i=0}^{n}\left(C_p^i C_q^{n-i} \sum_{k=0}^{m} C_i^k \Delta^k a_0\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m} C_p^i C_q^{n-i} C_i^k \Delta^k a_0\right)$$

și, intervertind ordinea însemnărilor, în continuare, avem

$$S_n^m(p, q) = \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} C_p^i C_q^{n-i} C_i^k \Delta^k a_0\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{m}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} C_p^i C_q^{n-i} C_i^k\right)\Delta^k a_0\right],$$

de unde, ținând încă seama de relația:

$$C_p^i C_i^k = C_p^k C_{p-k}^{i-k}, \tag{2}$$

stabilită de asemenea în articolul mai sus amintit, deducem:

$$S_n^m(p, q) = \sum_{k=0}^{m}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} C_p^k C_{p-k}^{i-k}\right)\Delta^k a_0\right] = \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\left[C_p^k\left(\sum_{i=0}^{n} C_{p-k}^{i-k} C_q^{n-i}\right)\Delta^k a_0\right] =$$

$$\sum_{k=0}^{m}\left[C_p^k\left(\sum_{i=k}^{n} C_{p-k}^{i-k} C_q^{n-i}\right)\Delta^k a_0\right]$$

de oarece suma parțială $\sum_{i=0}^{k-1} C_{p-k}^{i-k} C_q^{n-i} C_q^{n-i}$ este nulă, ca având toți termeni nuli, din cauza primului factor al acestor termeni.

Înlocuind acum în ultima parte a șirului de egalități din (3) pe i prin $i+k$, obținem

$$S_n^m(p, q) = \sum_{k=0}^{m}\left[C_p^k\left(\sum_{i=0}^{n-k} C_{p-k}^i C_q^{n-k-i}\right)\Delta^k a_0\right] \tag{4}$$

și ținând seama de relația

$$\sum_{i=0}^{n-k} C_{p-k}^i C_q^{n-k-i} = C_{p+q-k}^{n-k} \tag{5}$$

dedusă din relația cunoscută

$$\sum_{i=0}^{n} C_p^i C_q^{n-i} = C_{p+q}^n \tag{6}$$

prin înlocuirea simultană a lui p prin $p-k$ și a lui n prin $n-k$, relația (4), la rândul ei, devine:

$$\boxed{S_n^m(p, q) = \sum_{k=0}^{m} C_p^k C_{p+q-k}^{n-k} \Delta^k a_0} \tag{II}$$

și astfel avem în (II) formula generală căutată.

Cazuri particulare. 1°. Pentru $q=p$, formula (II) devine

$$S_n^m(p, p) = \sum_{k=0}^{m} C_p^k C_{2p-k}^{n-k} \Delta^k a_0, \tag{7}$$

în care făcând în plus $p=n$, avem

$$S_n^m(n, n) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k C_{2n-k}^{n-k} \Delta^k a_0, \tag{8}$$

ceeace, dacă ținem seama de faptul că

$$C_n^k C_{2n-k}^{n-k} = C_n^k C_{2n-k}^n = C_{2n-k}^k C_{2(n-k)}^{n-k}$$

se mai poate scrie și sub forma

$$S_n^m(n, n) = \sum_{k=0}^{m} C_{2n-k}^k C_{2(n-k)}^{n-k} \Delta^k a_0. \tag{8'}$$

2°. Dacă $m=1$; deci dacă a_i este termenul de rang i al unei progresii aritmetice elementare sau de primul ordin, formula (II) se scrie

$$S_n^1(p, q) = \sum_{k=0}^{1} C_p^k C_{p+q-k}^{n-k} \Delta^k a_0.$$

de unde, desvoltând și ținând seama că

$$\Delta^0 a_0 = a_0, \qquad \Delta a_1 = a_1 - a_0 = \frac{a_n - a_0}{n},$$

deducem:

$$S_n^1(p, q) = C_{p+q}^n a_0 + p\, C_{p+q-1}^{n-1} \frac{a_n - a_0}{n},$$

iar, mai departe, având în vedere relația

$$C_{p+q-1}^{n-1} = \frac{n}{p+q} C_{p+q}^n,$$

vom avea

$$S_n^1(p, q) = \left(\frac{q a_0 + p a_n}{p+q}\right) C_{p+q}^n. \tag{9}$$

3°. Dacă $m=1$ și $q=p$, formula (II) dobândește, după cum se poate ușor constata, forma remarcabilă

$$S_n^1(p, p) = \left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2p}^n, \tag{10}$$

ceeace vrea să spună, explicit că avem satisfacută relația

$$\sum_{i=0}^{n} C_p^i C_p^{n-i} a_i = \left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2p}^n, \tag{11}$$

care, desvoltat se scrie

$$(12)\quad C_p^0 C_p^n a_0 + C_p^1 C_p^{n-1} a_1 + C_p^2 C_p^{n-2} a_2 + \cdots$$

$$\cdots + C_p^n C_p^0 a_n = \left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2p}^n .$$

4°. În cazul şi mai particular când $m = 1$ şi $q = p = n$, formula (II) devine

$$(13)\qquad S_n^1(n, n) = \left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2n}^n ,$$

ceeace ne spune că avem satisfacută relaţia

$$(14)\quad \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^{n-i} a_i \equiv \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 a_i = \left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2n}^n ,$$

a carei formă desvoltată este:

$$(15)\quad (C_n^0)^2 a_0 + (C_n^1)^2 a_1 + (C_n^2)^2 a_2 + \cdots + (C_n^n)^2 a_n = \left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2n}^n .$$

NOTE MATEMATICE

15. — *Tableaux des solutions des congruences* $x^2 \equiv r \pmod{5^\alpha}$ *pour* $\alpha = 2, 3, 4$.

Les trois tableuax qui suivent contiennent les solutions des congruences

$$x^2 \equiv r \pmod{5^2}, \quad x^2 \equiv r \pmod{5^3} \quad \text{et} \quad x^2 \equiv r \pmod{5^4}$$

pour toutes les valeurs de r.

Nous avons donné seulement la plus petite solution. Sur chacune des 3 tableaux x est $\equiv 5^\alpha$ ($\alpha = 2, 3, 4$), et, nous avons fait suivre le nombre du module *seulement* şi $x \equiv 5^\beta$ avec $\beta < \alpha$.

Ainsi toutes les valeurs de x du tableau A par exemple sont congrues à 5^2 sauf pour $r = 0$ où $x \equiv 5$.

Solutions de $x^2 \equiv r \pmod{5^2}$

r	x
0	0 (5)
1	1
4	2
6	9
9	3
11	6
14	8
16	4
19	12
21	11
24	7

Solutions de $x^2 \equiv r \pmod{5^3}$

r	x	r	x	r	x
0	0 (5^2)	41	54	86	31
1	1	44	13	89	33
4	2	46	36	91	29
6	16	49	7	94	62
9	3	51	26	96	61
11	56	54	48	99	43
14	42	56	41	100	± 10 (5^2)
16	4	59	53	101	51
19	12	61	41	104	27
21	39	64	8	106	59
		66	21	109	22
24	32	69	38	111	19
25	$\pm$ 5 (5^2)	71	14	114	58
26	49	74	18	116	46
29	23	76	24	119	37
31	34	79	52	121	11
34	28	81	9	124	57
36	6	84	47		
39	17				

Solutions de $x^2 \equiv r \pmod{5^4}$

r	x	r	x	r	x	r	x	r	x
0	0(5^2)	51	26	100	± 10(5^3)	146	211	194	38
1	1	54	298	101	51	149	282	196	14
4	2	56	166	104	27	150	± 45(5^3)	199	107
6	109	59	197	106	184	151	76	201	101
9	3	61	44	109	228	154	273	204	52
11	56	64	8	111	144	156	91	206	259
14	83	66	146	114	67	159	28	209	172
16	4	69	87	116	296	161	244	211	281
19	137	71	236	119	37	164	142	214	217
21	164	74	232	121	11	166	179	216	29
24	218	76	274	124	57	169	13	219	63
25	± 5(5^3)	79	177			171	214	221	186
26	299								
29	148	81	9	126	249	174	118	224	293
31	284	84	297	129	123	176	224	225	± 15(5^3)
34	97	86	94	131	266	179	202	226	199
36	6	89	283	134	128	181	84	229	98
39	267								
41	71	91	221	136	194	184	72	231	191
44	112	94	62	139	208	186	294	234	272
46	36	96	189	141	254	189	133	236	231
49	7	99	168	144	12	191	104	239	58

Solutions de $x^2 \equiv r \pmod{5^4}$

r	x	r	x	r	x	r	x	r	x
241	46	289	17	339	92	386	69	434	178
244	88	291	196	341	279	389	167	436	169
246	239	294	138	344	188	391	129	439	242
249	68	296	161	346	64	394	238	441	21
251	126	299	243	349	207	396	289	444	288
								446	111
254	248	301	151	350	$\pm 40(5^3)$	399	32	449	143
256	16	304	77	351	176	400	$\pm 20(5^3)$	451	226
259	253	306	291	354	223	401	201	454	198
261	181	309	53	356	59	404	102	456	134
264	292	311	81	359	147	406	216	459	78
266	121	314	258	361	19	409	278	461	219
269	113	316	271	364	183	411	119	464	33
271	39	319	163	366	204	414	108	466	96
274	157	321	264	369	213	416	54	469	312
275	$\pm 35(5^3)$	324	18	371	136	419	263	471	311
276	174	326	149	374	193	421	89	474	82
279	227	329	73	376	124	424	257	475	$\pm 60(5^3)$

Solutions de $x^2 \equiv r \pmod{5^4}$

r	x	r	x	r	x	r	x	r	x
281	159	331	116	379	252	426	99	476	74
284	153	334	47	381	234	429	48	479	277
286	131	336	31	384	247	431	41	481	309
484	22	511	306	539	233	566	229	594	187
486	269	514	42	541	304	569	212	596	61
489	308	516	246	544	237	571	139	599	43
491	171	519	262	546	286	574	268	600	$\pm 35(5^3)$
494	287	521	86	549	132	576	24	601	301
		524	93						
496	114	525	$\pm 55(5^3)$	551	276	579	302	604	152
499	307	526	49	554	173	581	241	606	66
501	251	529	23	556	141	584	203	609	103
504	127	531	34	559	303	586	156	611	106
506	209	534	222	561	206	589	158	614	192
509	122	536	256	564	117	591	154	616	79
								619	162
								621	261
								624	182

A. GLODEN

---

16. — *Ergänzende Bemerkung zur Tripel-Lösung zu* $K_1, K_2, \ldots, K_9 \overset{n}{=} L_1, L_2, \ldots, L_9$ *für* $n = 2, 4, 6, 8, 10$. (Cf. Note Matematice 2 in „Revista Matematică din Timişoara", März 1943.)

I. Man kommt sowohl von 1, 11, $12 \overset{m}{=} 4$, 9, 13 für $m = 2, 4$ als auch von 7, 14, $21 \overset{m}{=} 1$, 18, 19 für $m = 2, 4$ zur Relation.

(1) 2, 16, 21, $25 \overset{n}{=} 5$, 14, 23, 24 ($n = 2, 4, 6$) nach der Methode von *G. Tarry*.

Aus (1) entsteht die Relation

2) 0, 4, 9, 23, 27, 41, 46, $50 \overset{7}{=} 1$, 2, 11, 20, 30, 39, 48, 49.

Daraus ergibt $h = 9$

(3) 0, 4, 10, 23, 27, 29, 41, 46, 57, $58 \overset{8}{=} 1$, 2, 13, 18, 30, 32, 36, 49, 55, 59.

Setzt man $h = 19$ bei (2), so bekommt man

(4) 0, 4, 9, 21, 27, 41, 50, 58, 67, $68 \overset{8}{=} 1$, 2, 11, 19, 28, 42, 48, 60, 65, 69.

Aus (3) ergibt $h = 23$ die Identität

(5) 0, 4, 10, 24, 25, 29, 41, 41, 53, 57, 58, 72, 78, $82 \overset{9}{=} 1$, 2, 13. 18, 30, 32, 33, 49, 50, 52, 64, 69, 80, 81,

woraus 41, 37, 31, 17, 16, $12 \overset{m}{=} 40$, 39, 28, 23, 11, 9, 8 für $m = 2, 4, 6, 8$ entsteht.

Aus (4) ergibt $h = 17$ die Relation

(6) 0, 4, 9, 18, 27, 36, 41, 45, 50, 59, 68, 77, 82, $86 \overset{9}{=} 1$, 2, 11, 17, 26, 38, 42, 44, 48, 60, 69, 75, 84, 85.

Setzt man nun $h = 19$ bei (3), so bekommt man die *gleiche* Identität, wie sie sich ergibt, wenn man $h = 9$ bei (4) setzt, nämlich

(7) 0, 4, 10, 20, 21, 27, 37, 41, 51, 57, 58, 68, 74, $78 \overset{9}{=} 1$, 2, 13, 18, 19, 30, 36, 42, 48, 59, 60, 65, 76 77.

Daraus ergibt $h = 17$ die Relation

(8) $0, 4, 10, 20, 35, 41, 47, 51, 53, 57, 78, 82, 93, 94 \overset{10}{=} 1, 2, 13, 17, 38, 42, 44, 48, 54, 60, 75, 85, 91, 95.$

Zur *gleichen* Relation gelangten wir am Schlusse von (3) in meiner Note (Revista Matematică din Timişoara", Anul XXIII, No. 1, Seite 5). Von (8) dieser gegenwärtigen Ausführungen ab gelangen wir auf dem *gleichen* Wege wie von Absatz (4) meiner publizierten Note ab zu den Resultaten für

$$\sum_{i=1}^{9} K_i^n = \sum_{i=1}^{9} L_i^n \text{ für } n = 2, 4, 6, 8, 10.$$

II. Diese Resultate zeigen noch folgende Kuriosität

(1) $1, 61, 85, 31, 55, 101, 63, 87, 93 \overset{n}{=} 25, 49, 89, 17, 67, 97, 69, 75, 99$ $(n=2, 4, 6, 8, 10)$

$$1^2+61^2+85^2 = 25^2+49^2+89^2$$
$$31^2+55^2+101^2 = 17^2+67^2+97^2$$
$$63^2+87^2+93^2 = 69^2+75^2+99^2.$$

(2) $6, 31, 59, 10, 43, 63, 16, 30, 53 \overset{n}{=} 3, 25, 62, 9, 46, 61, 21, 32, 50$ $(n=2, 4, 6, 8, 10)$

$$6^2+31^2+59^2 = 3^2+25^2+62^2$$
$$10^2+43^2+63^2 = 9^2+46^2+61^2$$
$$16^2+30^2+53^2 = 21^2+32^2+50^2.$$

(3) $15, 16, 66, 27, 31, 62, 13, 46, 56 \overset{n}{=} 6, 24, 65, 18, 49, 53, 22, 29, 64$ $(n=2, 4, 6, 8, 10)$

$$15^2+16^2+66^2 = 6^2+24^2+65^2$$
$$27^2+31^2+62^2 = 18^2+49^2+53^2$$
$$13^2+46^2+56^2 = 22^2+29^2+64^2.$$

ALFRED MOESSNER ANSBACH (GERMANIA-BAVARIA)

---

17. — *Sur le théorème de Feuerbach.*

1. *E. Lemoine* a donné la relation

(1) $$\sum a^2 (a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b) = 16 S^2 (R-2r)^2,$$

entre des éléments habituels d'un triangle A B C, puis en a déduit l'expression

(2) $$F F' = -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2(p^2-3r\delta)},$$

$(\delta = 4R+r)$, $F F'$ étant la distance du point F de *Feuerbach*, situé sur le cercle (I) inscrit, au point F' où la tangente menée par F au cercle (I) touche l'ellipse de *Steiner* inscrite au triangle fondamental.

L'auteur a d'ailleurs montré comment les relations (1) et (2) se transforment quand on change b en $-b$, c en $-c$ et si on remplace le cercle inscrit par l'un des cercles exinscrits [1].

2. Il peut être intéressant d'ajouter encore, comme application de la formule (1), une nouvelle démonstration du théorème de *Feuerbach*.

On sait que si θ_a, θ_b, θ_c sont les angles qu'une transversale orientée Δ fait avec les directions des côtés B C, C A, A B de B vers C, de C vers A de A vers B, on a, en grandeur et en signe [2],

(3) $$\sum a \cos\theta_b \cos\theta_c = -\frac{S}{R}.$$

Soient l la longueur algébrique d'un vecteur $\overline{P P'}$ placé sur Δ et x, y, z les longueurs algébriques des projections orthogonales de ce vecteur sur les côtés du triangle.

On a, en grandeur et en signe

$$x = l\cos\theta_a, \quad y = l\cos\theta_b, \quad z = l\cos\theta_c,$$

et il résulte de (3) que

(4) $$l^2 = -\frac{R}{S}(a y z + b z x + c x y).$$

Considérons le cas particulier où la transver-

(1) *Revue de Mathématiques spéciales*, t. II, pp. 233 à 235, questions 112 et 113.

(2) *R. Goormaghtigh*, *The Tohoku Mathematical Journal*, 1925–93.

sale Δ étant située sur la droite $I O_9$ et orientée du point I vers O_9, les points P, P' coïncident respectivement avec ces deux points. Si α, β, γ sont les projections orthogonales du point O_9, sur BC, CA, AB, on a en grandeur et en signe,

$$x = D\alpha = DA_m + \frac{1}{2} A_m A_n, \quad DA_m = \frac{1}{2}(b-c),$$

$$A_m A_h = A_m B + B A_h = -\frac{a}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{c^2-b^2}{2a};$$

d'où

$$x = \frac{1}{4a}(b-c)(2a-b-c),$$

et on en déduit y et z par des permutations circulaires des lettres a, b, c.

Dès lors, puisque $abc = 4RS$, le carré l^2 de $I O_9$ est

$$l^2 = \frac{1}{64 S^2} \Sigma a^2 (a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2a$$

$$= \frac{1}{64 S^2} \cdot 16 S^2 (R-2r)^2 = \frac{1}{4}(R-2r)^2.$$

Or, R est plus grand que $2r$; on a donc, en grandeur et en signe

$$\overline{I O_9} = \frac{R}{2} - r,$$

et il en résulte que le cercle (I) est tangent intérieurement au cercle (O_9).

On démontrerait par des calculs analogues que les cercles exinscrits sont tangents extérieurement au cercle des neuf points (O_9).

V. THÉBAULT
TENNIE (SARTHE-FRANCE)

---

18. — *Observare asupra unui determinant.*

Fie punctele A, B, C, M în linie dreaptă, abscisele primelor 3 față de ultimul ca origine fiind a, b, c.

Determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^n \\ 1 & b & b^n \\ 1 & c & c^n \end{vmatrix}$$

conduce:

pentru $n = 0$, la relația lui *Chasles:*

$$\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0;$$

pentru $n = 1$, la relația lui *Euler:*

$$\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0;$$

pentru $n = 2$, la relația lui *Stewart* [1]

$$\overline{MA^2} \cdot \overline{BC} + \overline{MB^2} \cdot \overline{CA} + \overline{MC^2} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0;$$

iar pentru n oarecare, întreg și pozitiv, la relația [2]:

$$\overline{MA^n} \cdot \overline{BC} + \overline{MB^n} \cdot \overline{CA} + \overline{MC^n} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \Sigma \overline{MA^p} \cdot \overline{MB^q} \cdot \overline{MC^r} = 0,$$

unde p, q, r iau toate valorile întregi și pozitive dela 0 la $n-2$, așa ca să avem $p+q+r=n-2$.

ANDREI DOBRESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLVIII, No. 12, August 1943. Calculul vectorial (urmare și sfârșit), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu.* Neegalități cu indicatori de ordin superior, de Comandor *I. Linteș.* Proprietăți ale normalelor la curbe, de *N. Abramescu.* Triunghiuri limită, de *Șerban Gheorghiu.* Raport pentru decernarea premiului de Mecanică, de *G. G. Constantinescu, Al. Stoenescu* și *Gabriela Țițeica.* Note matematice, Probleme rezolvate și propuse.

2 *Mathematica,* Vol. XIX, 1943. Omagiu D lui *Dimitrie Pompeiu.* Sur les rapports entre les dérivées et les différences divisées, par *Paul Montel D. Pompeiu,* par *O. Onicescu.* Sur la relation entre les quadriques de *Moutard* et les sections d'une surface par des plans menés par une droite passant par un point de la surface, par *N. Abramescu.* Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles, par *Th. Anghelutza.* Sur deux équations fonctionnelles, par *V. Alaci.* Résolution d'un problème de *M. Zarankiewicz* pour une famille d'ensembles parfaits, par *Sophie Piccard.* Vorläufige Bestimmung der geographischen Länge der Universitäts-Sternwarte zu Clnj-Timișoara, von *Joan Armeanca.* Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique de degré n et l'équation dérivée de degré $n-2$, par *J. Soula.* Medida de angulos infinitisimales, par *Edourdo MA Galvez Laguarta.* Essai sur la théorie mathématique des sensations de couleurs, par *Piotr Szymanski.* Sur les courbes de *Tzitzéica,* par *Gh. Th. Gheorghiu.* Sur l'écoulement fluide par la rotation d'un biplan „en tandem" autour d'un axe situé dans son propre plan, par *Caius Jacob.* Topologie fonctionnelle, par *C. Popovici.* Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de *Riemann* a sa frontière de mesure harmonique nulle, par *S. Stoïlow.* Singularités des fonctions analytiques uniformes et Polynomes de *Tchebichef,* par *Georges Calugereanu.* Sur une équation fonctionnelle qui caractérise des polynomes, par *Michel*

---

[1]) *R. Deaux,* Sur le théorème de *Stewart,* Mathesis 1935—27.

[2]) *A. Dobrescu,* O generalizare a formulei lui *Stewart.* Pozitiva, an. III, Nr. 3—5.

Ghermanescu. Quelques applications de certaines équations fonctionnelles, par *D. V. Ionescu*

3. *Buletinul Politehnicei din București*, Anul XIII, 1942. Sur les réseaux (M), par *R Roșca.* Le raporteur autoréducteur, par *D. Curileanu.* Sur les systèmes de forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donneé, par *A. Stoenescu.* Sur le mouvement général d'un fluide parfait, par *I. Cârstoiu.* Auftrieb und Widerstand für mittlere und kleinere Reynold'sche Zahlen, von *D Dumitrescu.* Application des fonctions elliptiques à l'étude de quelques cas de la flexion de tiges. par *G. Sikorski.* Mai cuprinde și alte articole de specialitate, semnate de D-nii: *E. Bratu; N. Cernescu; Er. Toporescu; C Belcot; M D. Ilie; P. Cretzoiu; O Vlădutiu; A. Avramescu; D Pavel; C. Parteni-Antoni* et *N. Popinceanu*; *T. Tănăsescu; I Linteș.*

4. *P Sergescu.* Procesele-Verbale ale ședințelor Cercului Matematic al Societății de Științe din Cluj în refugiu la Timișoara (Monografii Matematice Fascicola IX).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 858. — *Fie p un număr prim mai mare de cât 5. Să se arate că, dacă $2p+1$ nu este prim, numărul $2p$ nu poate fi un indicator, adică nu există nici un număr* N *astfel ca* $\varphi(N)=2p$.

T. POPOVICIU

Să presupunem că, în condițiile impuse lui p ar exista un număr N așa în cât

$$\varphi(N)=2p.$$

Avem două posibilități de examinat.

1. N *este divizibil prin p,* deci

$$N=p^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\dots$$

q_1, q_2 ... fiind factori primi diferiți de p. Avem

$$\varphi(N=p^{\alpha-1}q_1^{\beta-1}q_2^{\beta-2}\dots(p-1)(q_1-1)(q_2-1)\cdot\cdot=2p,$$

care necesită neapărat condițiile

$$\alpha-1=0,\quad q_1=q_2=\dots 1 \text{ și } p-1=2,$$

ultima dând $p<5$, deci contrar enunțului.

2. N *este prim cu p,* deci

$$N=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\dots$$

$$\varphi(N)=q_1^{\beta_1-1}q_2^{\beta_2-1}\dots(q_1-1)(q_2-1)\cdots=2p,$$

ceiace necesită ca unul din factorii neprimi și perechi q_1-1, q_2-1, . . să fie egal cu $2p$, de exemplu

$$q_1-1=2p \qquad q_1=2p+1.$$

Toți ceilalți factori $q_2^{\beta_2-1},\dots$ reducându-se la 1, iar

$$\beta_1-1=0.$$

Dar în acest caz N devine numărul prim

$$N=q_1=2p+1$$

și astfel proprietatea este demonstrată.

Notă. O soluție, cu mici lipsuri de rigoare, s-a primit de la d-l *P. I. Ghișoiu* la data propuneri problemei.

Se vede din demonstrație că se poate înlocui în enunț $p>5$ prin $p>3$.

G-l Gh. B.

Problema 1771. — *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x^2+2=y^2+z^2+t^2.$$

A. GLODEN

Soluția autorului. Avem identitatea ușor de verificat,

$$(p^2+m\,m_1+n\,n_1)^2+[p(m-m_1)]^2+[p(n-n_1)]^2=$$

$$(p^2-m\,m_1-n\,n_1)^2+[p(m+m_1)]^2+[p(n+n_1)]^2,$$

în care dacă luăm $p=1$, $m-m_1=1$, $n-n_1=1$, obținem

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{c}(1+m^2-m+n^2-n^2+2=\\ (m^2-m+n^2-n-1)^2+(2m-1)^2+(2n-1)^2\end{array}},$$

care comparată cu ecuația dată se vede cine sunt x, y, z, t.

Exemplu: Pentru $m=4$, $n=12$, din (1) avem

$$145^2+2=143^2+7^2+23^2.$$

Observare. Dacă în (1) punem

$$2m-1=x^{\alpha},\quad 2n-1=y^{\beta}\quad (x,\ y \text{ impari}),$$

se găsește

$$\left(\frac{x^{2\alpha}+y^{2\beta}+2}{4}\right)^2+2=\left(\frac{x^{2\alpha}+y^{2\beta}-6}{4}\right)^2+x^{2\alpha}+y^{2\beta}.$$

Exemplu: 1°. Pentru $x^{\alpha}=3^2$, $y^{\beta}=5^2$, avem

$$177^2+2=175^2+3^4+5^4=31331.$$

2°. Pentru $x^{\alpha}=3^3$, $y^{\beta}=5^2$, avem

$$339^2+2=337^2+3^6+5^4=114923.$$

Soluția d-lui Mahrenholz Johannes (Cottbus).

Dacă putem determina numere întregi ca să avem

$$(2)\qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2+d^2 \\ e^2+2=f^2+g^2+h^2 \\ ae=bf+cg+dh, \end{cases}$$

atunci de aci deducem

$$(3)\quad (an+e)^2+2=(bx+f)^2+(cn+g)^2+(dn+h)^2.$$

Exemple: 1°. Pentru $a=3$, $b=2$, $c=2$, $d=1$, $e=-1$, $f=-1$, $g=-1$, $h=1$, relaţiile (2) fiind verificate, relaţia (3) ne dă

$$\boxed{(3n-1)^2+2=(2n-1)^2+(2n-1)^2+(n+1)^2}.$$

Particularizând pe n, avem:

$$5^2+2=3^2+3^2+3^2$$
$$8^2+2=5^2+5^2+4^2$$
$$11^2+2=7^2+7^2+5^2.$$

2°. Pentru $a=3$, $b=2$, $c=2$, $d=1$, $e=0$, $f=1$, $g=-1$, $h=0$ relaţiile (2) fiind verificate, relaţia (3) ne dă

$$\boxed{(3n)^2+2=(2n+1)^2+(2n-1)^2+n^2},$$

Particularizând pe n, avem

$$6^2+2=5^2+3^2+2^2$$
$$9^2+2=7^2+5^2+3^2$$
$$12^2+2=9^2+7^2+4^2$$
$$15^2+2=11^2+9^2+5^2.$$

3°. Pentru $a=3$, $b=2$, $c=2$, $d=1$, $e=1$, $f=1$, $g=1$, $h=-1$, relaţiile (2) fiind verificate, relaţia (3) ne dă

$$\boxed{(3n+1)^2+2=(2n+1)^2+(2n+1)^2+(n-1)^2}.$$

Particularizând pe n, avem:

$$7^2+2=5^2+5^2+1^2$$
$$10^2+2=7^2+7^2+2^2$$
$$13^2+2=9^2+9^2+3^2.$$

4°. Pentru $a=9$, $b=8$, $c=4$, $d=1$, $e=6$, $f=5$, $g=3$, $h=2$, relaţiile (2) fiind verificate, relaţia (3) devine

$$\boxed{(9n+6)^2+2=(8n+5)^2+(4n+3)^2+(n+2)^2},$$

Particularizând pe n, avem:

$$15^2+2=13^2+7^2+3^2$$
$$24^2+2=21^2+11^2+4^2$$
$$33^2+2=29^2+15^2+5^2.$$

Au mai dat soluţii particulare d-nii: *Jidanu C.* (Polit., Timişoara) şi *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit., Timişoara).

Observare. Ar fi interesant să se dea soluţia generală.

Problema 1790. — *Să se găsească unghiul format de tangentele exterioare cercurilor* O, O′, *tangente exterioare, ştiind că raportul razelor lor este* n. *Pentru ce raport unghiul căutat este* α.

Cazuri particulare: $n=3$; $\alpha=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

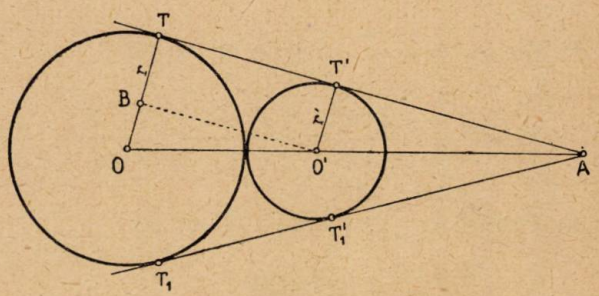
TIBERIU I. HOMPOLA

Soluţie. Fie O, O′ două cercuri tangente exterioare de raze r şi r'.

Ducem tangentele comune, exterioare TT', T_1, T_1' care se întâlnesc într'un punct A pe linia centrelor OO', ce trece prin punctul de contact al cercurilor.

1°. Ducem $O'B$ paralelă cu TT' şi în triunghiul dreptunghic OBO', putem scri

$$(1)\qquad \sin \widehat{BO'O}=\frac{OB}{OO'}.$$



Dar pe figură se observă cu uşurinţă că,

$$\sphericalangle BO'O=\sphericalangle TAO=\sphericalangle\frac{TAT_1}{2},$$

apoi

$$OB=OT-BT=r-r' \text{ şi } OO'=r+r',$$

astfel că relația (1) se poate scri

$$(2)\qquad \sin\frac{\widehat{T\,A\,T_1}}{2}=\frac{r-r'}{r+r'}=\frac{\frac{r}{r'}-1}{\frac{r}{r'}+1}=\frac{n-1}{n+1},$$

fiindcă raportul $\frac{r}{r'}=n$ prin ipoteză

Din (2) deducem

$$(3)\qquad \boxed{\sphericalangle T\,A\,T_1=2\arcsin\frac{n-1}{n+1}}.$$

Avem astfel unghiul cerut în funcție de raportul n dat.

2°. Dacă $\sphericalangle T\,A\,T_1=\alpha$ (cunoscut, se poate afla raportul n din (3), care ne dă

$$\frac{n-1}{n+1}=\sin\frac{\alpha}{2},$$

de unde

$$(4)\qquad n=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos\frac{\pi-\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\pi-\alpha}{2}},$$

deci

$$(5)\qquad \boxed{n=\operatorname{cotg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}},$$

Cazuri particulare: 1°. Pentru $n=3$, relația (3) ne dă

$$\sphericalangle T\,A\,T_1=2\arcsin\frac{1}{2}=2k\pi+(-1)^k 60^0,$$

$$(k=0,\ 1,\ 2\ldots)$$

2°. Pentru $\alpha=\frac{\pi}{6}$, relația (4) ne dă

$$n=\frac{1+\sin 15^0}{1-\sin 15^0}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}.$$

3°. Pentru $\alpha=\frac{\pi}{3}$, relația (4) ne dă

$$n=\frac{1+\sin 30^0}{1-\sin 30^0}=3.$$

4°. Pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}$, relația (4) ne dă

$$n=\frac{1+\sin 45^0}{1-\sin 45^0}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}.$$

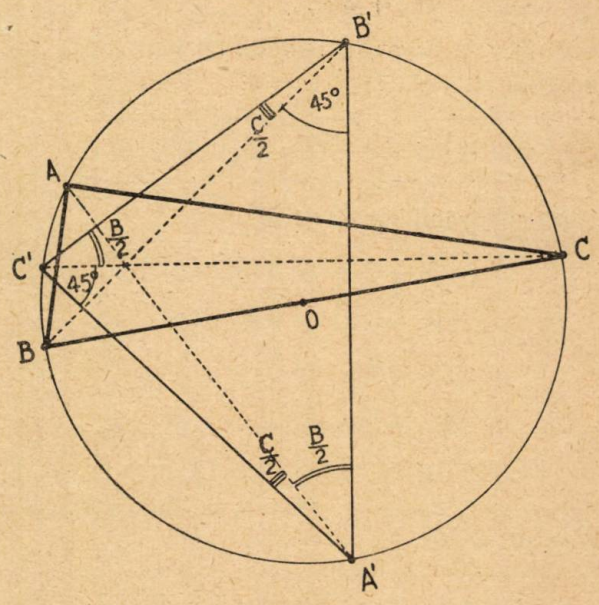
Soluții bune date de d-nii: *Bakonyi C* (Polit., Timișoara), *Cristea I. C.* (Polit., Timișoara), *Enăchescu Gr. Ion* (lic Milit, Timișoara), *Mihoc N. Ovidiu Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Tica P. Marin-Gall, Tilică C Ștefan, Vostinariu Gheorghe* și *Wegener Eugen* (București)

Problema 1829. — *Se dă triunghiul* A B C ($A=90^0$) *și fie* A′, B′, C′ *punctele unde bisectoarele interioare întâlnesc cercul circumscris. Notând cu* S *și* S′ *respectiv suprafețele triunghiurilor* A B C *și* A′ B′ C′, *să se calculeze mărimea unghiurilor* B *și* C *ca să avem:*

$$\frac{S'}{S}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

STEFAN MUSTA

Soluție. Fie A B C triunghiul dreptunghic înscris în cercul de rază R, iar A′ B′ C′ triunghiul cu vârfurile pe același cerc, A A′ B B′, C C′ fiind bisectoarele interioare ale triunghiului A B C.



Observând figura, avem

$$(1)\qquad S=\frac{\overline{A\,B}\cdot\overline{A\,C}}{2}=\frac{2R\sin C\cdot 2R\sin B}{2}=R^2\sin 2B.$$

De altă parte, suprafața triunghiului A′ B′ C′ în funcție de raza cercului circumscris și de unghiuri, este

$$(2)\qquad S'=2R^2\sin A'\sin B'\sin C',$$

(Compléments de Trigonométrie par F.G.M., p. 210).

Cum pe figură se observă uşor măsura unghiurilor A', B', C', anume

$$A'=\frac{C}{2}+\frac{B}{2}=45^0, \text{ (fiindcă } B+C=90^0),$$

$$B'=\frac{C}{2}+45^0, \qquad C'=\frac{B}{2}+45^0,$$

relaţia (2) devine succesiv

$$S'=2R\sin 45^0\sin\left(\frac{B}{2}+45^0\right)\sin\left(\frac{C}{2}+45^0\right)=$$

$$\sqrt{2}R^2\sin\left(\frac{B}{2}+45^0\right)\cos\frac{B}{2},$$

sau

$$(3)\ S'=R^2\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)\cos\frac{B}{2}=\frac{R^2(\sin B+\cos B+1)}{2}.$$

Impărţind relaţia (3) prin (1) şi ţinând seamă de condiţia din enunţ, avem

$$\frac{\sin B+\cos B+1}{2\sin 2B}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

De aci deducem

$$\sin B+\cos B+1=(1+\sqrt{2})\sin 2B=$$

$$(1+\sqrt{2})[(\sin B+\cos B)^2-1],$$

sau

$$(\sin B+\cos B+1)[(1+\sqrt{2})(\sin B+\cos B-1)-1]=0.$$

Cum primul factor este $\neq 0$, căci $B<90^0$, rezultă

$$\sin B+\cos B-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1,$$

sau

$$\sin B+\cos B=\sqrt{2}.$$

Ridicând la patrat, rezultă

$$\sin 2B=1,$$

prin urmare $B=45^0$, deci şi $C=45^0$, în care caz are loc relaţia din enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara) *Enăchescu Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Roman), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Radoslav Ion* (lic. Lugoj), *Şimon Petru* (lic. Arad), *Tilică Ştefan* (S-Lt) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1835. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} -p^3 & q^3 & r^3 \\ (x+p)^3 & (x-q)^3 & (x-r)^3 \\ (x+2p)^3 & (x-2q)^3 & (x-2r)^3 \end{vmatrix}=0.$$

CORNELIU POPESCU

Soluţie. Adunăm elementele primii linii la acelea corespunzătoare ale liniei a 2-a, apoi elementele corespunzătoare ale liniei a 3-a înmulţite cu 8 le adunăm la elementele liniei întâia şi dând x factor comun din linia 2-a şi a 3-a, obţinem

$$x^2\begin{vmatrix} -p^3 & q^3 & r^3 \\ x^2+3px+3p^2 & x^2-3qx+3q^2 & x^2-3rx+3r^2 \\ x^2+6px+12p^2 & x^2-6qx+12q^2 & x^2-6rx+12r^2 \end{vmatrix}=0$$

Scăzând elementele liniei a 2-a din acelea corespunzătoare ale liniei a 3-a şi dând 3 factor comun avem

$$3x^2\begin{vmatrix} -p^3 & q^3 & r^3 \\ x^2+3px+3p^2 & x^2-3qx+3q^2 & x^2-3rx+3r^2 \\ 3p^2+px & 3q^2-qx & 3r^2-rx \end{vmatrix}=0$$

Scădem elementele liniei a 3-a din acelea corespunzătoare ale liniei a 2-a şi dăm x factor comun, găsim

$$3x^3\begin{vmatrix} -p^3 & q^3 & r^3 \\ x+2p & x-2q & x-2r \\ 3p^2+px & 3q^2-qx & 3r^2-rx \end{vmatrix}=0$$

şi dezvoltând, determinantul, după regula lui *Sarrus*, obţinem

$$3x^3[-p^3(x-2q)(3r^2-rx)+r^3(x+2p)(3q^2-qx)+$$
$$q^3(x-2r)(3p^3+px)-r^3(x-2q)(3p^2+px)+$$
$$p^3(x-2r)(3q^2-qx)-q^3(x+2p)(3r^2-rx)]=0.$$

Efectuând calculele din paranteza mare, găsim un polinom de gradul al 2-lea în x, a-i cărui coeficienţi notându-i pentru prescurtare cu a, b, c, găsim

$$3x^3(ax^2+bx+c=0.$$

Această ecuaţie are rădăcina triplă $x=0$ şi două rădăcini uşor de aflat ale ecuaţiei

$$ax^2+bx+c=0.$$

Soluţii date de d-nii: *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara) şi *Pop Emil* (Polit., Timişoara).

Problema 1850. — *O persoană schimbă o sumă de bani în monede de 1, 2, 5, 10, 20 şi 50 lei. Ea primeşte un număr egal, respectiv, de 1 şi 2 lei, 10 şi 20 lei, 5 şi 20 lei.*

Monedele de 20 lei reprezintă o sumă egală cu suma reprezentată de monedele de 5 lei şi 1 leu. Monedele de 2 lei reprezintă o sumă egală reprezentată de monedele de 10 lei şi 50 lei la un loc. Să se afle câte monede de fiecare fel are acea persoană. C-TIN C. JIDANU

Soluţie. Fie x numărul monedelor de 1 leu, deci şi de 2 lei; y numărul monedelor de 10 lei deci şi de 20 lei; z numărul monedelor de 5 lei, deci şi 50 lei.

Conform enunţului trebuie să avem

$$\begin{cases} 20\,y = 50\,z + x \\ 2\,x = 10\,y + 50\,z. \end{cases}$$

Cum ecuaţia 2-a se mai poate scri

$$5\,y = x - 25\,z,$$

scăzând-o din prima, obţinem

$$25\,y = 75\,z,$$

sau

$$\begin{cases} y = 2\,z, \text{ deci} \\ x = 35\,z. \end{cases}$$

Problema este nedeterminată şi rezultă că, dacă acea persoană a primit k monede de 5 lei (deci şi de 50 lei), atunci a primit un număr dublu de monede de 10 lei (deci şi de 20 lei) şi un număr de 35 ori mai mare de monede de 1 leu (deci şi de 2 lei), de cât numărul modelor de 5 lei (deci şi 50 lei).

Soluţii bune date de d-nii: *Aldea V. Mircea* (Buzău) *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Facsko I. Gheorghe* (lic. Loga, Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (lic. Tg-Jiu), *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit, Timişoara), *Piţulescu Gheorghe* (Sub-Lt) şi *Simon Ş. Petru* (lic. Arad).

PROBLEME PROPUSE

2162. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, astfel ca primele două cifre ca şi ultimele să formeze patrate perfecte, cel de al 2-lea să înceapă cu cifra cu care se termină primul şi mai ştiind că cifra semnificativă din mijloc este un cub perfect. MARCEL D. COTARIU

2163. — Să se găsească un cub de nouă cifre, astfel ca despărţindu-l în grupe de câte trei cifre, numărul format de grupul mijlociu să întreacă cu o unitate suma numerilor formate de celelalte două grupe. M. GHERMANESCU

2164. — Să se rezolve ecuaţia

$$2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} + 16^{x-1} = 31.$$

CAP EUGEN ŞT. IACOB

2165. — 1°. Să se separe rădăcinele reale ale ecuaţiei

$$f(x) \equiv 2\sin x + 8\,x\cos x - 3\,x^2 \sin x = 0.$$

2°. Să se găsească semnele derivatelor $f'(x)$ şi $f''(x)$ în intervalul $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3°. Să se calculeze cu două zecimale exacte rădăcina ecuaţiei propusă, cuprinsă în acest interval.

TH. ANGHELUTA

2166. — Fiind dată o sferă (O) cu centrul O şi raza R, se circumscrie sferei un con circular drept. Să se determine unghiul de la vârf al conului circumscris astfel, ca *raportul* dintre ariile laterale ale conurilor cu vârful comun în centrul sferei, iar cu bazele, respectiv baza conului circumscris şi cercul său de tangenţă cu sfera, să fie egal cu un număr dat k

Să se arate, că, dacă $k^2 > 2$, problema este totdeauna posibilă.

Să se examineze cazul particular $k^2 = 2$.

O. N. ŢINO

2167. — Dacă într'un tetraedru, distanţele cele mai scurte ale muchilor opuse sunt ortogonale două câte două, atunci acel tetraedru este echifacial şi reciproc. V THÉBAULT

2168. — Să se demonstreze pe cale geometrică relaţia

$$4\,\mathrm{tg}\,15^0 = 1 + \mathrm{tg}^2 15^0.$$

G-L GH. BUICLIU

2169 — Dacă într'un triunghiu, în care notaţiile sunt cele obicinuite, unim ortocentrul H cu mijlocul C' a laturei AB, apoi notăm $HC' = n$ şi $\sphericalangle ACH = \gamma$, avem relaţiile:

$$c^2 = 4\,[n^2 \cos 2\gamma + a\,b\,\mathrm{cotg\,A\,cotg\,B\cos(A-B)}],$$

$$n^2 \sin 2\gamma = a\,b\,\mathrm{cotg\,A\,cotg\,B\sin(A-B)}.$$

V. ALACI

Erată In problema 2081, ultimul termen din relaţia 3-a este $-6\,a^4\,b\,c\cos(B-C)$

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Anton Ioan. (P; 2137, 2152, 2155, 2157, 2159, 2161); *Cherdivarencu I.* (2148, 2150, 2151); *Giurconiu Gh. Mihail* (2036, 2043, 2098); *Grozescu Liviu* (1927, 1959, 1982, 2006, 2017, 2025, 2063, 2094, 2095, 2096, 2106, 2107, 2113, 2115, 2120, 2121, 2124, 2125, 2134, 2135, 2139, 2148, 2156, 2158, 2159, 2161); *Ionescu F. Petre* (1405, 1687, 1697, 1833, 2034, 2106, 2107, 2123, 2139, 2145, 2150, 2155, 2156, 2161); *Knopf Hermann* (N; P; 2141, 2150, 2155, 2161); *Loziciu I.* (P; 2031, 2054, 2057, 2086, 2103, 2132); *Mahrenholz Iohannes*, (2139, 2140, 2144, 2145, 2148); *Marinescu N.* (2115, 2120, 2131, 2134, 2135, 2145, 2151, 2155, 2156, 2157, 2161); *Pat I. Moise* (2023, 2038, 2041, 2050, 2057, 2084, 2089, 2097, 2098, 2104, 2107, 2110, 2116, 2120, 2121, 2121, 2134, 2139, 2145, 2155, 2156, 2157, 2161, 2166); *Pleşcan D Ion* (2154, 2155, 2157); *Popescu I. Barbu* (2098, 2104); *Pupeszescu Gh. Ion* (2114, 2124, 2145, 2154, 2155, 2161); *Rădulescu V. Nicolae* (2115, 2148, 2149, 2150, 2151, 2156); *Sabău Gh. Mihai* (P; 1934, 1935, 2023, 2047, 2115, 2116, 2121, 2134, 2137, 2141, 2142, 2145, 2156, 2158, 2159, 2161; *Soare D. S.* (2129, 2135, 2151, 2156); *Stefănescu Marin* (2156, 2157); *Stretea I. Alexandru* (2098, 2116, 2120, 2121, 2134, 2135, 2138, 2139, 2145, 2150, 2154, 2155, 2156, 2157, 2161); *Tarţa Valeria* (2023, 2113, 2115, 2121, 2124, 2135, 2150, 2151); *Tincu C. C-tin* (2115, 2129, 2139, 2155, 2161); *Wegener Eugen.* (P; 2081, 2124, 2132, 2155, 2156, 2157, 2158, 2161).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.
5. Sub-Lt *Moisă I. Gheorghe.* Adresa: *Agripina Moisă,* Str. Ştefan cel Mare No. 242, Roman.
6. *Petre F. Ionescu.* Strada Severinului No. 76, Craiova.
7. *Ioan N. Gligor.* Aliuş, Jud. Timiş-Torontal.

În prezent *„Boletin Matematico"*, nu îl primim şi rugăm a nu ni se mai trimete, deocamdată, abonamente.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXII, cu preţul de lei 300 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXIII. OCTOMVRIE 1943 No. 8.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: RELATIUNI REMARCABILE INTR'UN TRIUNGHIU.
2. NOTE MATEMATICE 20, 21, 22.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 993, 1844, 1846, 1862, 2023.
6. PROBLEME PROPUSE: 2170–2177.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasă

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 – 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 8 TIMISOARA, OCTOMVRIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politehnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN
Şcoala Politehnică, Timişoara.

RELAŢIUNI REMARCABILE ÎNTR'UN TRIUNGHIU

DE

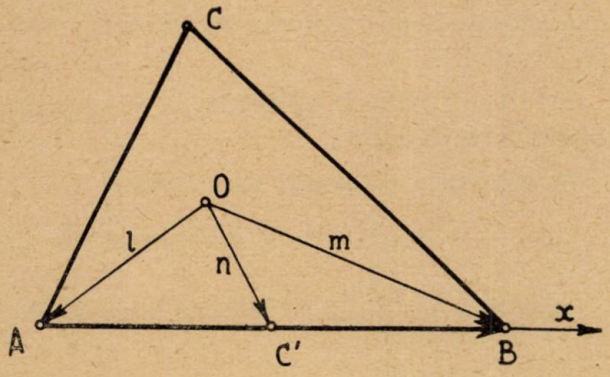
V. ALACI.

Folosind *o metodă simplă şi unitară* — inspirată dintr'un articol al D-lui Prof. *Pompeiu* [1], unde în mod ingenios sunt asociate *noţiunile de vector şi număr complex corespunzător* — am reuşit să stabilesc numeroase relaţiuni metrice într'un triunghiu[2], inclusiv relaţiile clasice.

Urmând aceiaşi metodă, voiu stabili în cele ce urmează *o clasă întreagă de alte relaţii remarcabile între elementele unui triunghiu*, relaţii care dacă ni s-ar cere să le demonstrăm direct, am întâmpina la multe din ele oarecare greutăţi, fiindcă ar trebui să aplicăm anumite teoreme de trigonometrie, precum şi unele artificii de calcul.

PARTEA I-a.

1. Într'un triunghiu oarecare ABC — în care păstrăm notaţiile obicinuite — fie O un punct din planul său şi C' mijlocul laturei AB.



[1]) *D. Pompeiu:* O observare asupra patrulaterului convex şi o problemă („R. M. T", An. XXII, No. 6, p. 67).

[2]) *V. Alaci:* Relaţiuni metrice într'un triunghiu („R.M.T.", An. XXII, No. 7, pp. 79—81).

Considerăm apoi vectorii $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$ (diferenţa vectorilor $\overline{OB}$, $\overline{OA}$) şi $2\overline{OC'}$ (suma vectorilor $\overline{OB}$, $\overline{OA}$).

Dacă x, y sunt *numerele complexe corespunzătoare* vectorilor $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$, atunci $(y-x)$ şi $(y+x)$ sunt *numerele complexe corespunzătoare* vectorilor $\overline{AB}$ şi $2\overline{OC'}$.

Notând cu l, m, n lungimele vectorilor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC'}$, apoi

$$\alpha = \sphericalangle BAO, \quad \beta = \sphericalangle ABO, \quad \gamma = \sphericalangle AC'O$$

şi alegând AB ca axă, observăm pe figură că *numerele complexe* x, y, $(y-x)$, $(y+x)$, în funcţie de *module* şi *argumente*, se pot exprima astfel:

$$(1)\quad \begin{aligned} &x = l e^{i(\pi+\alpha)} = -l e^{i\alpha}, \quad y = m e^{i(2\pi-\beta)} = m e^{-i\beta}, \\ &(y-x) = c, \quad (y+x) = 2n e^{i(2\pi-\gamma)} = 2n e^{-i\gamma}, \\ &(i = \sqrt{-1}). \end{aligned}$$

2. Cu această pregătire vom arăta mai departe că, din orice identitate algebrică care conţine variabilele x şi y, putem deduce cu uşurinţă, *relaţii remarcabile într'un triunghiu.*

Pornim în acest scop de la următoarele câteva identităţi, evidente

$$(2)\quad \begin{aligned} (y-x)^2 &= (y+x)^2 - 4xy, \\ (y-x)^2 &= y^2 + x^2 - 2xy, \\ (y-x)^3 &= y^3 - x^3 - 3xy(y-x), \\ (y-x)^2(y+x)^2 &= y^4 + x^4 - 2x^2y^2. \end{aligned}$$

Înlocuind x, y, $y-x$, $y+x$ prin valorile lor din (1), obţinem

$$(3)\quad \begin{aligned} c^2 &= 4n^2 e^{-2i\gamma} + 4lm e^{i(\alpha-\beta)}, \\ c^2 &= m^2 e^{-2i\beta} + l^2 e^{2i\alpha} + 2lm e^{i(\alpha-\beta)}, \\ c^3 &= m^3 e^{-3i\beta} + l^3 e^{3i\alpha} + 3clm e^{i(\alpha-\beta)}, \\ 4c^2n^2 e^{-2i\gamma} &= m^4 e^{-4i\beta} + l^4 e^{4i\alpha} - 2l^2m^2 e^{2i(\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

3. Dacă acum în fiecare din aceste relații, care conțin numere imaginare, egalăm întâi părțile reale și apoi cele imaginare, ținând seamă că, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, găsim:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} c^2 = 4\,[n^2\cos 2\gamma + l\,m\cos(\alpha-\beta)\,] \\ c^2 = m^2\cos 2\beta + l^2\cos 2\alpha + 2\,l\,m\cos(\alpha-\beta) \\ c^3 = m^3\cos 3\beta + l^3\cos 3\alpha + 3\,c\,l\,m\cos(\alpha-\beta) \\ 4\,c^2\,n^2\cos 2\gamma = m^4\cos 4\beta + l^4\cos 4\alpha \\ \qquad -2\,l^2\,m^2\cos 2(\alpha-\beta) \end{cases},$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} n^2\sin 2\gamma = l\,m\sin(\alpha-\beta) \\ m^2\sin 2\beta - l^2\sin 2\alpha = 2\,l\,m\sin(\alpha-\beta) \\ m^3\sin 3\beta - l^3\sin 3\alpha = 3\,c\,l\,m\sin(\alpha-\beta) \\ 4\,c^2\,n^2\sin 2\gamma = m^4\sin 4\beta - l^4\sin 4\alpha + \\ \qquad 2\,l^2\,m^2\sin 2(\alpha-\beta) \end{cases}.$$

4. Să particularizăm acum poziția punctului O în planul triunghiului A B C și să scrim ce devin relațiile (I) și (II).

1°. **Cazul când O coincide cu vârful C.**

În acest caz, avem

$\alpha = A$, $\beta = B$, $l = b$, $m = a$, $n = m_c$ (mediana din C),

astfel că formulele (I) și (II) devin

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} c^2 = 4\,[m_c\cos 2\gamma + a\,b\cos(A-B)\,] \\ c^2 = a^2\cos 2B + b^2\cos 2A + 2\,a\,b\cos(A-B) \\ c^3 = a^3\cos 3B + b^3\cos 3A + 3\,a\,b\,c\cos(A-B) \\ 4\,c^2\,m_c^2\cos 2\gamma = a^4\cos 4B + b^4\cos 4A - \\ \qquad 2\,a^2\,b^2\cos 2(A-B) \end{cases},$$

$$\text{(A}_1\text{)}\quad \begin{cases} m_c^2\sin 2\gamma = a\,b\sin(A-B) \\ a^2\sin 2B - b^2\sin 2A = 2\,a\,b\sin(A-B) \\ a^3\sin 3B - b^3\sin 3A = 3\,a\,b\,c\sin(A-B) \\ 4\,c^2\,m_c^2\sin 2\gamma = a^4\sin 4B - b^4\sin 4A + \\ \qquad 2\,a^2\,b^2\sin 2(A-B) \end{cases}.$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Într'un triunghiu oarecare A B C, *în care* C C′ *este mediană, iar* $\sphericalangle$ A C′ C $= \gamma$, *celelalte notații fiind cele obicinuite, avem relațiile* (A) *și* (A$_1$).

2°. **Cazul când O coincide cu A′, mijlocul laturei B C.**

În acest caz fiindcă avem

$\beta = B$, $\gamma = \pi - A$, $l = m_a$ (mediana din A),

$$m = \frac{a}{2}, \qquad n = \frac{b}{2},$$

astfel că relațiile (I) și (II) devin:

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} c^2 = b^2\cos 2A + 2\,a\,m_a\cos(\alpha - B) \\ 4\,c^2 = a^2\cos 2B + 4\,m_a^2\cos 2\alpha + 4\,a\,m_a\cos(\alpha - B) \\ 8\,c^3 = a^3\cos 3B + 8\,m_a^3\cos 3\alpha + 12\,a\,c\,m_a\cos(\alpha - B) \\ 16\,b^2\,c^2\cos 2A = a^4\cos 4B + 16\,m_a^4\cos 4\alpha \\ \qquad -8\,a^2\cos 2(\alpha - B) \end{cases},$$

$$\text{(B}_1\text{)}\quad \begin{cases} b^2\sin 2A + 2\,a\,m_a(\alpha - B) = 0 \\ a^2\sin 2B - 4\,m_a^2\sin 2\alpha = 4\,a\,m_a\sin(\alpha - B \\ a^3\sin 3B - 8\,m_a^3\sin 3\alpha = 12\,a\,c\,m_a\sin(\alpha - B) \\ 16\,b^2\,c^2\sin 2A + a^4\sin 4B - 16\,m_a^4\sin 4\alpha \\ \qquad +8\,a^2\,m^2\sin 2(\alpha - B) = 0 \end{cases}.$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *ducem mediana* A A′ $= m_a$ *și notăm* $\sphericalangle$ B A A′ $= \alpha$, *celelalte notații fiind obicinuite, atunci avem relațiile* (B) *și* (B$_1$).

3°. **Cazul când O coincide cu A′, piciorul bisectoarei din A.**

În acest caz, din figură, avem evident

$$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \beta = B, \quad l = l_a \text{ (bisectoarea din A)},$$

$$m = A'B = \frac{a\,c}{b+c} \text{ (din teorema bisectoarei)},$$

$$n = \frac{c\sin\frac{A}{2}}{2\sin\left(\gamma + \frac{A}{2}\right)} \text{ (din teorema sinusurilor în triunghiul A C′ A′)}.$$

În virtutea acestor relații, formulele (I) și (II), după unele simplificări, devin:

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\frac{A}{2}\cos 2\gamma}{\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right)}+\dfrac{4\,a\,l_a}{c(b+c)}\cos\left(\dfrac{A}{2}-B\right)=1 \\ c^2=\dfrac{a^2c^2\cos 2B}{(b+c)^2}+l_a^2\cos A+\dfrac{2acl_a}{b+c}\cos\left(\dfrac{A}{2}-B\right) \\ c^3=\dfrac{a^3c^3\cos 3B}{(b+c)^3}+l_a^3\cos\dfrac{3A}{2}+\dfrac{2\,a\,c^2\,l_a}{b+c}\cos\left(\dfrac{A}{2}-B\right) \\ \dfrac{c^4\sin^2\frac{A}{2}\cos 2\gamma}{\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right)}=\dfrac{a^4c^4\cos 4B}{(b+c)^4}+ \\ l_a^4\cos 2A-\dfrac{2\,a^2\,c^2\,l_a^2}{(b+c)^2}\cos(A-2B) \end{cases},$$

$$(C_1)\quad \begin{cases} c(b+c)\sin^2\dfrac{A}{2}\sin 2\gamma=4al_a\sin\left(\dfrac{A}{2}-B\right)\sin^2\left(\gamma+\dfrac{A}{2}\right) \\ \dfrac{a^2c^2\sin 2B}{(b+c)^2}-l_a^2\sin A=\dfrac{2acl_a}{b+c}\sin\left(\dfrac{A}{2}-B\right) \\ \dfrac{a^3c^3\sin 3B}{(b+c)^3}-l_a^3\sin\dfrac{3A}{2}=\dfrac{3ac^2l_a}{b+c}\sin\left(\dfrac{A}{2}-B\right) \\ \dfrac{c^4\sin^2\frac{A}{2}\sin 2\gamma}{\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right)}=\dfrac{a^4c^4\sin 4B}{(b+c)^4}-l_a^4\sin 2A \\ +\dfrac{2\,a^2\,c^2\,l_a^2}{(b+c)^2}\sin(A-2B) \end{cases}.$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Într'un triunghiu A B C, *în care s-a dus bisectoarea* $AA'=l_a$, *s-a notat* $\sphericalangle AC'A'=\gamma$ (C' *mijlocul lui* A B) *și s-au păstrat notațiile obicinuite, există totdeauna relațiile* (C) *și* (C_1).

4°. Cazul când O coincide cu A', piciorul înălțimei din A.

În acest caz, din figură, avem evident

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-B,\quad \beta=B,\quad \gamma=2B,\quad l=h_a\ (\text{înălțimea din A}),$$

$$m=c\cos B,\qquad n=\frac{c}{2}.$$

În virtutea acestor relații, formulele (I) și (II), după unele simplificări, devin:

$$(D)\quad \begin{cases} c=c\cos 4B+4\,h_a\cos B\sin 2B \\ c^2=c^2\cos^2B\cos 2B-h_a^2\cos 2B+2c\,h_a\cos B\sin 2B \\ c^3=c^3\cos^3B\cos 3B-h_a^3\sin 3B+3c^2h_a\cos B\sin 2B \\ c^4-h_a^4=c^4\cos^4B+2\,c^2\,h_a^2\cos^2B \end{cases},$$

$$(D_1)\quad \begin{cases} c\sin 4B=4\,h_a\cos B\cos 2B \\ c^2\cos^2B\sin 2B-h_a^2\sin 2B=2\,h_a\cos B\cos 2B \\ c^3\cos^3B\sin 3B+h_a^3\cos 3B=3c^2h_a\cos B\cos 2B \\ c^4-h_a^4=c^4\cos^4B+2\,c^2\,h_a^2\cos^2B \end{cases}.$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Într'un triunghiu A B C, *în care notațiile sunt cele obicinuite, (*h_a *înălțimea din* A*), există totdeauna relațiile* (D) *și* (D_1).

5°. Cazul când O coincide cu ortocentrul H al triunghiului.

Se observă pe o figură construită conform enunțului, că în acest caz avem

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-B,\quad \beta=\frac{\pi}{2}-A,\quad l=\frac{c\cos A}{\sin C}=a\operatorname{cotg}A,$$

$$m=b\operatorname{cotg}B,$$

astfel că relațiile (I) și (II) devin:

$$(E)\quad \begin{cases} c^2=4\,[n^2\cos 2\gamma+a\,b\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\cos(A-B)] \\ c^2+a^2\operatorname{cotg}^2A\cos 2B+b^2\operatorname{cotg}^2B\cos 2A= \\ \qquad 2\,a\,b\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\cos(A-B) \\ c^3+a^3\operatorname{cotg}^3A\sin 3B+b^3\operatorname{cotg}^3B\sin 3A= \\ \qquad 3\,a\,b\,c\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\cos(A-B) \\ 4\,c^2n^2\cos 2\gamma=a^4\operatorname{cotg}^4A\cos 4B+b^4\operatorname{cotg}^4B\cos 4B \\ \qquad -2\,a^2\,b^2\operatorname{cotg}^2A\operatorname{cotg}^2B\cos 2(A-B) \end{cases},$$

$$(E_1)\quad \left|\begin{array}{c} n^2 \sin 2\gamma = a\,b \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \sin (A-B) \\ b^2 \operatorname{cotg}^2 B \sin 2A - a^2 \operatorname{cotg}^2 A \sin 2B = \\ 2\,a\,b \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \sin (A-B) \\ a^3 \operatorname{cotg}^3 A \cos 3B - b^3 \operatorname{cotg}^3 B \cos 3A = \\ 3\,a\,b\,c \sin (A-B) \\ 4c^2 n^2 \sin 2\gamma + b^4 \operatorname{cotg}^4 B \sin 4A = a^4 \operatorname{cotg}^4 A \sin 4B \\ + 2a^2 b^2 \operatorname{cotg}^2 A \operatorname{cotg}^2 B \sin 2(A-B) \end{array}\right| ,$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

În orice triunghiu, cu notațiile obicinuite, avem relațiile (E) *și* (E_1), *în care n este segmentul ce unește ortocentrul* H *cu* C′ *mijlocul laturei* AB, *iar* $\gamma = \sphericalangle ACH$.

6°. Cazul când O este centrul cercului înscris.

Pe o figură construită conform enunțului, în acest caz particular avem

$$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \beta = \frac{B}{2}, \quad l = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$m = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}, \quad n = \frac{r}{\sin\gamma}$$

astfel că relațiile (I) și (II) devin:

$$(F)\quad \left|\begin{array}{c} c^2 = 4r^2\left(\dfrac{\cos 2\gamma}{\sin^2\gamma} + \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}\right) \\ \dfrac{c^2}{r^2} = \dfrac{\cos A}{\sin^2\dfrac{A}{2}} + \dfrac{\cos B}{\sin^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{2\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}} \\ \dfrac{c^3}{r^3} = \dfrac{\cos\dfrac{3A}{2}}{\sin^3\dfrac{A}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{3B}{2}}{\sin^3\dfrac{B}{2}} + \dfrac{3\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}\,\dfrac{c}{r} \\ \dfrac{4c^2}{r^2}\,\dfrac{\cos 2\gamma}{\sin^2\gamma} = \dfrac{\cos 2A}{\sin^4\dfrac{A}{2}} + \dfrac{\cos 2B}{\sin^4\dfrac{B}{2}} \\ - \dfrac{2\cos(A-B)}{\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}} \end{array}\right| ,$$

$$(F_1)\quad \left|\begin{array}{c} 2\operatorname{cotg}\gamma = \dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}} \\ \dfrac{\sin B}{\sin^2\dfrac{B}{2}} - \dfrac{\sin A}{\sin^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{2\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}} \\ \dfrac{\sin\dfrac{3B}{2}}{\sin^3\dfrac{B}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{3A}{2}}{\sin^3\dfrac{A}{2}} = \dfrac{3\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}\,\dfrac{c}{r} \\ 8\dfrac{c^2}{r^2}\operatorname{cotg}\gamma = \dfrac{\sin 2B}{\sin^4\dfrac{B}{2}} - \dfrac{\sin 2A}{\sin^4\dfrac{A}{2}} + \\ \dfrac{2\sin(A-B)}{\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}} \end{array}\right| .$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare ABC, *în care notațiile sunt cele obicinuite, unim centrul cercului înscris* O *cu mijlocul* C′ *al laturei* AB *și notăm* $\sphericalangle AC'O = \gamma$, *atunci avem relațiile* (F) *și* (F_1).

7°. Cazul când O coincide cu centrul unuia din cercurile exînscrise.

Construind figura în condițiile enunțului și presupunând că O coincide, de exemplu, cu centrul O_a, corespunzător laturei a, observăm pe figură că avem

$$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}, \quad l = \frac{r_a}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$m = \frac{r_a}{\cos\frac{B}{2}}, \quad n = \frac{r_a}{\sin\gamma},$$

astfel că relațiile (I) și (II) devin:

$$c^2 = 4r_a^2\left(\frac{\cos 2\gamma}{\sin^2\gamma} + \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)$$

$$\frac{c^2}{r_a^2} = \frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}} - \frac{\cos B}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{2\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

(G) $$\frac{c^3}{r_a^3} = \frac{\cos\frac{3A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{3B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} + \frac{3\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{c}{r_a},$$

$$4\frac{c^2}{r_a^2}\cdot\frac{\cos 2\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{\cos 2A}{\sin^4\frac{A}{2}} + \frac{\cos 2B}{\cos^4\frac{B}{2}} + \frac{2\cos(A-B)}{\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$2\operatorname{cotg}\gamma + \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 0$$

$$\frac{\sin A}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{\sin B}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{2\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

(G′) $$\frac{\sin\frac{3A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{3B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} = \frac{3\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{c}{r_a},$$

$$8\frac{c^2}{r_a^2}\operatorname{cotg}\gamma = \frac{\sin 2B}{\cos^4\frac{B}{2}} - \frac{\sin 2A}{\sin^4\frac{A}{2}} - \frac{2\sin(A-B)}{\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *în care notațiile sunt cele obicinuite, unim* O_a *centrul cercului exînscris cu mijlocul* C′ *a laturei* A B *și notăm* $\sphericalangle$ A C′ $O_a = \gamma$, *atunci avem ralațiile* (G) *și* (G_1).

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

19. — *Quelques égalités multigrades vraies seulement pour des valeurs paires ou impaires de l'exposant.*

Les résultats qui suivent ont été obtenus par l'application réitérée des théorèmes suivants:

I. L'égalité multiple

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \overset{x}{=} b_1, b_2, \ldots, b_q \quad (x = 1, 3, 5 \ldots 2n-1)$$

entraîne la suivante:

$$-a_1+t, -a_2+t, \ldots -a_p+t, \quad b_1+t, \quad b_2+t, \ldots \quad b_q+t \overset{x}{=}$$
$$a_1+t, \quad a_2+t, \ldots \quad a_p+t, -b_1+t, -b_2+t, \ldots -b_q+t,$$
$$x = 2, 4, 6 \ldots 2n.$$

II. L'égalité multiple

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \overset{x}{=} b_1, b_2, \ldots, b_p \quad (x = 2, 4 \ldots 2n)$$

entraîne celle-ci:

$$-a_1+t, -a_2+t, \ldots -a_p+t, a_1+t, a_2+t, \ldots a_p+t \overset{x}{=}$$
$$-b_1+t, -b_2+t, \ldots -b_p+t, b_1+t, b_2+t, \ldots b_p+t.$$
$$x = 1, 3, 5 \ldots 2n+1.$$

t est un entier quelconque. On réduit le plus possible le nombre de termes de la nouvelle égalité multigrade en prenant pour t la moitié de la différence la plus fréquente $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$.

L'égalité de départ est celle donnée par M. *Moessner*

$$1, 13, 25, 55, 75, 87, 95 \overset{x}{=} 7, 11, 19, 61, 69, 91, 93.$$
$$(x = 1, 3, 5, 7, 9).$$

A. Par l'application du théorème I, en faisant $t = 6$, il vient

$$1, 31, 55, 61, 63, 85, 87, 93, 101 \overset{x}{=}$$
(α) $$17, 25, 49, 67, 69, 75, 89, 97, 99$$
$$(x = 2, 4, 6, 8, 10).$$

$$S_2 = 45.321, \quad S_4 = 328.028.937.$$

En appliquant à la multigrade trouvée le théorème II, avec $t = 4$, on trouve après suppression des nombres opposés considérés deux à deux dans chaque membre,

$$3, 5, 13, 35, 45, 63, 65, 65, 67, 85, 91, 95, 105 \overset{x}{=} 27, 29, 51, 53, 57, 73, 79, 81, 83, 101, 103$$

$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$; $S_1 = 737$.

Cette égalité renferme 13 termes dans le 1-re membre et 11 dans le second.

L'application du théorème I à cette dernière multigrade donne, avec t=1, la suivant:

$$1, 6, 15, 17, 22, 27, 29, 31, 32, 37, 42, 42, 45, 47, 52, 52 \overset{x}{=} 3, 7, 13, 18, 23, 25, 28, 33, 34, 36, 39, 43, 46, 48, 50, 43$$

$(x = 2, 4, 6, 8, 10, 12)$; $S_2 = 19, 129$, $S_4 = 35.281.609$.

Cette dernière égalité renferme 16 termes par membre.

B. En appliquant à la multigrade (α) le théorème II, avec $t = 15$, il vient

$$1, 5, 7, 17, 26, 27, 30, 37, 38, 50, 51, 54, 58 \overset{x}{=} 16, 20, 20, 24, 32, 36, 43, 45, 52, 56, 57$$

$(x = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$; $S_1 = 401$.

C'est une égalité de la même forme que celle indiquée ci-dessus, mais avec des nombres plus petits.

A. GLODEN

---

20. — *Magische Quadrate aus Primzahlen.*

Die folgenden magischen Quadrate ergeben sowohl in den waagrechten Reihen als auch in den senkrechten Reihen und Diagonalen konstante Summen und bestehen nur aus Primzahlen.

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

I.

43	1	67
61	37	13
7	73	31

II.

Bei II gilt auch $43^2+1^2+67^2=7^2+73^2+31^2$ (1. und 3. waagrechte Reihe) sowie $43^2+61^2+7^2=67^2+13^2+31^2$ (1. und 3. senkrechte Reihe).

577	7	337
67	307	547
277	607	37

III.

Bei III haben alle Primzahlen die Endziffer 7.

569	59	449
239	359	479
269	659	149

IV.

Hier haben alle Primzahlen die Endziffer 9.

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

V.

Alle Primzahlen haben Endziffer 7.

19	149	389	499
409	479	29	139
449	349	199	59
179	79	439	359

VI.

Alle Primzahlen haben Endziffer 9.

Anmerkung: In II sind 2 Relation von der Form $a, b, c \overset{2}{=} d, e, f$ enthalten, welche nur aus Primzahlen bestehen. Auch die Identität

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \overset{3}{=} B_1, B_2, B_3, B_4$$

lässt sich mit Primzahlen bilden, wofür ich folgende 2 Lösungen angebe:

(α) $5, 29, 37, 61 \overset{3}{=} 13, 13, 53, 53$;

(β) $1, 17, 31, 47 \overset{3}{=} 7, 7, 41, 41$.

ALFRED MOESSNER
ANSBACH (Germania-Bavaria).

21. — *Sur l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle.*

Si l'on projette orthogonalement en X_1, Y_1, Z_1 sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, le conjugué isogonal P_1 d'un point P situé sur un diamètre Δ du cercle circonscrit au triangle, et si l'on désigne par X_1' la seconde extrémité de la corde $X_1 P_1$ dans le cercle $X_1 Y_1 Z_1$, la droite qui joint X_1' au milieu du segment rectiligne AP_1, passe par l'orthopôle φ de Δ.

Pour démontrer cette propriété qui généralise un théorème de *Mannheim, M. R. Goormaghtigh* établit que le point U d'intersection des droites $\varphi X_1'$ et AX_1 coïncide avec le milieu du segment rectiligne AP_1, car la droite $\varphi X_1'$ rencontre la hauteur AA' du triangle en un point K_a tel que $AK = P_1X_1' = PX$, X étant la projection de P sur BC [1].

Dès lors, le quadrilatère $\varphi K_a A' X$ est inscriptible et les droites φK_a et φX sont rectangulaires. Par analogie, Y et Z étant les projections de P sur CA et AB, V et W les milieux des segments rectilignes BP_1 et CP_1, Y_1' et Z_1' les secondes extrémités des cordes Y_1P_1 et Z_1P_1 dans le cercle $X_1Y_1Z_1$, K_b, K_c les points de rencontre de $\varphi Y_1'$, $\varphi Z_1'$ avec les hauteurs BB', CC', les droites φK_b et B'Y sont rectangulaires ainsi que les droites φK_c et C'Z.

Donc, *si l'on projette en* X, Y, Z *sur les côtés d'un triangle* ABC *un point* P *d'un diamètre* Δ *du cercle circonscrit et que l'on désigne par* P_1 *le conjugué isogonal de* P, *et par* U, V, W *les milieux des segments rectilignes* AP_1, BP_1, CP_1, *les cercles décrits sur* UX, VY, WZ, *comme diamètres, passent par l'orthopôle* φ *du diamètre* Δ.

V. THÉBAULT
TENNIE (SARTHE-FRANCE)

---

(1) *Journal de Vuibert*, t. XXXVIII, p. 69.

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ADMITERE IN ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA, 1943.

GEOMETRIE.

Punctele A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, aşezate consecutiv pe cercul dat (O), îl împart în zece părţi egale.

Insemnăm cu A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', respectiv punctele de intersecţie ale perechilor de drepte: (AD, IB); (BE, JC); (CF, AD); (DG, BE); (EH, CF); (FI, DG) (GJ, EH); (HA, FI); (IB, GJ); (JC, HA).

Asemenea, însemnăm cu A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H'', I'', J'', respectiv punctele de intersecţie ale perechilor de drepte: (BI, CJ); (CJ, DA); (DA, EB); (EB, FC); (FC, GD); (GD, HE); (HE, IF); (IF, JG); (JG, AH); (AH, BI).

Să se arate, că:

a. punctele A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', sunt pe un cerc.

b. punctele A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H'', I'', J'', sunt de asemenea pe un cerc.

Să se calculeze:

c. raza cercului A'', B'', C''.

d. raza cercului A', B', C'.

(21 Septemvrie, orele $8^1/_2 - 11^1/_2$).

ALGEBRĂ.

I.

Să se determine constantele *a*, *b*, *c*, astfel ca derivata funcţiei

$$(1)\quad y = a\,x + \frac{20\,x^2\,(x+3)}{1+4\,x^2} - b\lg(1+4\,x^2) - 4\,c\,\operatorname{arctg} 2\,x,$$

să admită rădăcinile $-1, 0$ şi 1.

Să se precizeze pentru fiecare din aceste valori, dacă funcţia (1) este maximă sau minimă.

Mai sunt valori ale variabilei x pentru care funcţia (1) admite maxim sau minim?

(Simbolul lg înseamnă logaritm neperian).

II.

Să se determine A astfel ca expresia

$$E = x\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}} - A\,x$$

să aibă o limită finită şi bine determinată pentru $x = \infty$. Să se afle apoi această limită.

III.

Să se determine *a* astfel ca ecuaţia

$$4\,x^4 - 20\,x^3 + 35\,x^2 - a\,x + 6 = 0$$

să aibă *suma a două rădăcini egală cu suma celorlalte două.*

Inlocuind *a* cu valoarea găsită, să se rezolve ecuaţia dată.

(21 Septemvrie, orele 16—19).

TRIGONOMETRIE.

I.

Să se rezolve un triunghiu oarecare A B C, cunoscând unghiul A, latura opusă a, precum și suma celorlalte două laturi $b + c = k$. Discuție.

Aplicație pentru $A = 39^0.24'.36''$, $a = 5{,}245$ m, $k = 8{,}356$ m.

II.

Să se circumscrie unei sfere de rază R un con de revoluție, a cărui suprafață laterală să fie egală cu πa^2, a fiind un număr cunoscut. Discuție.

Se va lua ca necunoscută unghiul din vârful conului, care se va însemna prin 2α. Să se arate că problema este totdeauna posibilă (oricare ar fi a pozitiv). Să se calculeze unghiul α, când $a = 2$ R.

III.

Să se rezolve ecuația

$$\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0.$$

(22 Septemvrie, orele $8^1/_2 - 11^1/_2$).

In loc de examen oral, s-au dat înscris următoarele chestiuni.

GEOMETRIE.

1. Se consideră un triunghiu dreptunghiu A B C în care cunoaștem catetele A B = 3, A C = 4. Se cere să se calculeze înălțimea A D scoborâtă din vârful unghiului drept pe ipotenuză.

2. Să se găsească volumul și suprafața laterală a corpului născut din rotația triunghiului dela problema precedentă în jurul ipotenuzei B C.

3. Se consideră un triunghiu A B C care se proiectează pe un plan P după triunghiul A′ B′ C′. Să se arate că medianele triunghiului A B C se proiectează după medianele triunghiului A′ B′ C′.

4. Se consideră, în raport cu două axe perpendiculare, triunghiul ale căror vârfuri au coordonatele A $(0, a)$, B $(b, 0)$, C $(c, 0)$ și se cere să se scrie ecuația cercului circumscris. Să i se găsească centrul și raza.

5. Prin origina axelor de coordonate se duce o coardă variabilă în cercul dela problema precedentă.

Să se găsească locul geometric al mijlocului acestei coarde.

6. Se cere să se regăsească rezultatul dela problema precedentă pe cale pur geometrică.

(22 Septemvrie, orele 16—19).

ALGEBRĂ.

I.

Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

și să se pună rezultatul sub forma unui produs de patru factori.

II.

Să se rezolve ecuația:

$$2x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

III.

Se dă funcția

$$y = \sin x$$

să se calculeze creșterea k a funcției y, corespunzătoare unei creșteri h a variabilei x și să se deducă de aici expresia derivatei acestei funcții.

IV,

Să se arate că funcția

$$z = x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$$

este omogenă, să i se determine gradul de omogeneitate și să se verifice formula lui *Euler*.

V.

Să se determine a, asfel ca ecuația:

$$2x^3 - 15x^2 + 37x + 2a = 0$$

să aibă rădăcinile în progresie aritmetică, și apoi să se rezolve.

VI.

Dintre toți cilindrii care au acelaș volum, să se determine acela care are suprafața totală minimă. (Se va nota volumul cilindrului cu πa^3, a fiind o constantă dată, și se va determina raza și înălțimea cilindrului în funcție de a, astfel ca suprafața totală să fie minimă).

(23 Septemvrie, orele $8^1/_2$ - $11^1/_2$).

TRIGONOMETRIE.

1. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile

$$1 + \sin a\,; \qquad \frac{\sin a + \cos b}{\cos a + \cos b}.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

3. Să se rezolve sistemele de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = m, \\ x + y = n, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

4. Să se arate în ce triunghiuri există relația:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\gamma - \beta)}{\sin \alpha + \sin(\gamma - \beta)}$$

α, β, γ fiind unghiurile interioare ale triunghiului.

5. Să se determine suprafața unui patrulater oarecare în funcție de diagonalele sale și de unghiul ce acestea il formează între ele.

6. Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu cunoscând semiperimetrul p și raza R a cercului circumscris.

(23 Septembrie, orele 16—19).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, No. 1, Septemvrie 1943. Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică". Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică".

Forţe dirijate după laturile unui triunghiu, de *Gh. D. Simionescu*. Raport pentru acordarea premiului „General *Şc. Panaitescu*", de Ing. *Al. Bunescu*, Comandor *I. Linteş* pi Cpt. *Gh. Ion Zamfirescu*.

Note matematice, problema rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 993 [1]. — *Dreptele ce unesc vârfurile unui triunghiu, cu mijloacele segmentelor pe care le determină pe o transversală oarecare laturile triunghiului, taie aceste laturi în trei puncte colineare.*

S-Lt A. Stan

Fie $A'B'C'$ o transversală şi M, N, P mijloacele segmentelor $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Trebue demonstrat că AM, BN, CP taie laturile triunghiului în punctele A_1, B_1, C_1 colineare.

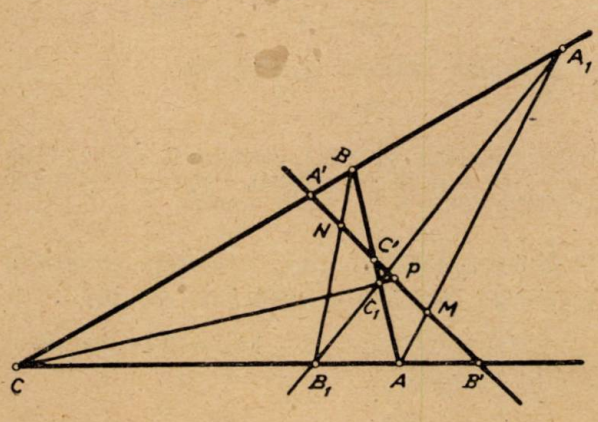
Triunghiurile $BA'C'$, $CB'A'$ tăiate de transversala AMA_1 dau

$$(1)\qquad \frac{A_1B}{A_1A'}\cdot\frac{MA'}{MC'}\cdot\frac{AC'}{AB}=1,$$

$$(2)\qquad \frac{A_1A'}{A_1C}\cdot\frac{AC}{AB'}\cdot\frac{MB'}{MA'}=1,$$

Înmulţind (1) cu (2), găsim

$$(3)\qquad \frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AC'}{AB'}=1.$$



[1]) Enunţ modificat puţin pentru claritate.

Triunghiurile $CB'A'$, $AC'B'$ tăiate de transversala BN, dau

$$(4)\qquad \frac{B_1C}{B_1B'}\cdot\frac{NB'}{NA'}\cdot\frac{BA'}{BC}=1,$$

$$(5)\qquad \frac{B_1B'}{B_1A}\cdot\frac{BA}{BC'}\cdot\frac{NC'}{NB'}=1.$$

Înmulţin (4) cu (5) şi simplificând, avem

$$(6)\qquad \frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{BA}{BC}\cdot\frac{B'A}{BC'}=1.$$

În fine, triunghiurile $AC'B'$, $BA'C'$ tăiate de transversala CP, dau

$$(7)\qquad \frac{C_1A}{C_1C'}\cdot\frac{PC'}{PB'}\cdot\frac{CB'}{CA}=1,$$

$$(8)\qquad \frac{C_1C'}{C_1B}\cdot\frac{CB}{CA'}\cdot\frac{PA'}{PC'}=1.$$

Înmulţirea lui (7) cu (8) dă

$$(9)\qquad \frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{CB}{CA}\cdot\frac{CB'}{CA'}=1.$$

Înmulţim (3) cu (6) şi cu (9) simplificăm şi dacă ţinem seamă că $A'B'C'$ este transversală, găsim

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1,$$

care arată că A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

Notă. 1°. Au dat bune soluţii pe această cale d-nii: *Boeriu Val.; Coşniţă C.; Ivănescu C.; Mihăileanu N. N.; Păsculescu V.; Pop L.; Roşca G. şi Süli M.*

2°. D-l *N. N. Mihăileanu* a dat o bună soluţie analitică.

3° D-l *Ionescu Bujor C.* a generalizat problema luând pe M, N, P drept conjugatele unui punct de pe transversale $A'B'C'$ faţă de segmentele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

4°. Problema generală şi cea dată în enunţ sunt cunoscute. Ele se găsesc în *Culegerea de Probleme de geometrie* de *G Ţiţeica* ed. 1929.

Gh, B.

Problema 1844. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$x!+1=(x+1)^2$$

în numere întregi pozitive.

G-l Gh. Buicliu

Soluţie. Dezvoltând binomul din membrul al 2-lea şi lăsând la o parte 1 din ambii membrii, avem

$$x!=x(x+1)$$

sau

$$(x-1)!\,x=x(x+2)$$

De aci deducem

$$x=0 \quad \text{şi} \quad (x-1)!=x+2.$$

Ultima ecuaţie se mai poate scri

$$(x-1)!-(x-1)=3,$$

sau

$$(x-1)[(x-2)!-1]=3.$$

Nu putem avea decât

(1) $\begin{cases} x-1=3 \\ (x-2)!-1=1, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-1=1 \\ (x-2)!-2=3. \end{cases}$

Din prima ecuaţie din (1) deducem $x=4$, valoare care verifică şi ecuaţia 2-a a sistemului (1).

Din prima ecuaţie din (2) deducem $x=2$, valoare care nu verifică a 2-a ecuaţie a sistemului (2), fiindcă $0!-1\neq 3$.

Rezultă din cele expuse că ecuatia dată, în condiţiile problemei admite numai soluţia $x=4$.

Au dat bune soluţii, d-ra *Mang Ileana* (studentă, Timişoara) şi d-nii *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Iacob St.* (Cpt), *Ionescu F. Petre* (Polit. Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (lic. Milit, Timişoara), *Popescu N Corneliu* (Giurgiu) şi *Vasilu Gh. D-tru* (lic. Milit., Timişoara).

Observare. D-l Cpt. *Iacob Eugen*, observă că problema propusă este un caz particular al problemei 101, din *„Foaia Matematică"* Anul III p. 48, propusă tot de D-l G-l *Buicliu*, în care se cer numerile întregi pozitive care satisfac relaţia

$$a!+b=(a+b)^2$$

Problema 1846. — *Să se afle limita expresiei*

$$E=\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x}-n}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\cdots+\sqrt[n]{\frac{1}{x}}-n}$$

pentru $x=1$, fără ajutorul derivatelor.

STEFAN MUSTA

Soluţie. Pentru $x=1$, expresia dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Pentru a-i afla adevărata valoare, o scrim astfel

$$E=\frac{(x-1)+(\sqrt{x}-1)+(\sqrt[3]{x}-1)+\cdots+(\sqrt[n]{x}-1)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{x}}-1\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}-1\right)+\cdots+\left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}}-1\right)}$$

şi apoi împărţind şi numărătorul şi numitorul prin $x-1$, obţinem

(1) $$E=\frac{\sum_{n-1}^{n}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}}{-\sum\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}(x-1)}}.$$

Căutăm limita pentru $x=1$, a fiecărei fracţii de forma $\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$.

Această fracţie, dacă notăm $\sqrt[n]{x}=y$, devine

$$\frac{y-1}{y^n-1}=\frac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)}=\frac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1};$$

deci

(2) $$\lim_{x=1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n}.$$

Luând limita expresiei (1) pentru $x=1$ şi cum la numărator şi numitor avem un număr finit de fracţii de forma (2), rezultă în virtutea relaţiei (2), că adevărata valoare a lui E este,

$$E=\lim_{x=1}\frac{\sum_{n=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}}{-\sum_{n=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}(x-1)}}=\frac{\sum_{n=1}^{n}\lim_{x=1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}}{-\sum_{n=1}^{n}\lim\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}(x-1)}}=-\frac{\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}}{\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}},$$

deci adevărata valoarea căutată, este

$$E=-1.$$

Soluţii bune date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Negrea A Mircea* (Brăila), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu) şi *Simon Ş. Petru* (lic. Arad).

Problema 1862. — *Să se determine parametrul λ (raţional), astfel încât rădăcinile ecuaţiei*

$$2x^4+x^3-6\lambda^2x^2-14x+8\lambda=0,$$

să verifice relaţia

$$\sum_{i=1}^{4}\operatorname{arc\,tg}x_1=\frac{\pi}{2}.$$

şi apoi să se rezolve complet ecuaţia dată, ştiind că o rădăcină este $\lambda+\sqrt{\lambda}$.

MIHU CERCHEZ

Soluţie. Notând

$$\operatorname{arc\,tg} x_i = \alpha_i,$$

deci

(1) $$x_1 = \operatorname{tg}\alpha_i$$

relaţia din enunţ devine

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\frac{\pi}{2},$$

sau

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha_3+\alpha_4)\right]=\operatorname{cotg}(\alpha_3+\alpha_4)$$

De aci deducem

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)=1$$

Dezvoltând şi ţinând seamă de relaţiile (1), putem scri

$$\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}\cdot\frac{x_3+x_4}{1-x_3x_4}=1,$$

sau

(2) $$(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=1+x_1x_2x_3x_4.$$

Cum în primul membru avem suma produselor rădăcinilor ecuaţiei date, iar în al 2-lea membru intră produsul acestor rădăcini, conform relaţiilor cunoscute dintre rădăcini şi coeficienţii unei ecuaţii, relaţia (2) se mai poate scri

$$-3\lambda^2=1+4\lambda,$$

şi

$$3\lambda^2+4\lambda+1=0,$$

deci

$$\lambda_1=-1,\qquad \lambda_2=-\frac{1}{3}.$$

şi ecuaţia dată devine

(3) $$2x^4+x^3-6x^2-14x-8=0$$

şi

(4) $$6x^4+3x^3-2x^2-42x-8=0.$$

Să trecem acum la partea 2-a a problemei şi să rezolvăm ecuaţiile (3) şi (4), care admit conform enunţului, prima, rădăcina $-1+\sqrt{-1}$ şi a 2-a rădăcina $-\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{1}{3}}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}$.

Ecuaţia (3) admiţând rădăcina $-1+\sqrt{-1}$, admite şi rădăcina $-1-\sqrt{-1}$, deci primul ei membru se divide prin

$$(x+1-\sqrt{-1})(x+1+\sqrt{-1})=(x+1)^2+1=x^2+2x+2,$$

şi efectuând împărţirea, găsim că ecuaţia (3) se poate scri

$$(x^2+2x+2)(2x^2-3x-4)=0,$$

având rădăcinele

$$x_1=-1+\sqrt{-1},\quad x_2=-1-\sqrt{-1},$$

$$x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}.$$

Ecuaţia (4) admiţând rădăcina $\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}$, admite şi rădăcina $\frac{-1-\sqrt{-1}}{3}$, deci primul ei membru se divide prin

$$\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{3}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{3}\right)=\frac{(3x+1)^2+3}{9}=\frac{9x^2+6x+4}{9},$$

şi efectuând împărţirea prin acest factor a primului membru din (4), constatăm că ea nu se face exact, ceeace înseamnă că ecuaţia (4) nu admite rădăcina $\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}$.

Soluţie dată de d-nul *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2023. — *Se dă un triunghiu dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este a. Să se calculeze în funcţie de a, elementele patrulaterului (unghiuri, laturi şi suprafaţă) format de bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor ascuţite* B *şi* C.

MIHAIL BOTEZ

Soluţie. Fie A B C triunghiul dreptunghic isoscel dat ($A=90^0$).

Ducem bisectoarele interioare B E, C E şi cele exterioare, B F, C F ale unghiurilor B şi C, precum şi mediana A J.

Se ştie că B E ⊥ B F şi C E ⊥ C F, E şi F fiind situate pe A J, căci triunghiurile B E C, B F C şi B A C sunt isoscele.

Unghiurile patrulaterului B E C F. Avem evident

$$\sphericalangle E B F = \sphericalangle E C F = 90^0,$$

apoi fiindcă

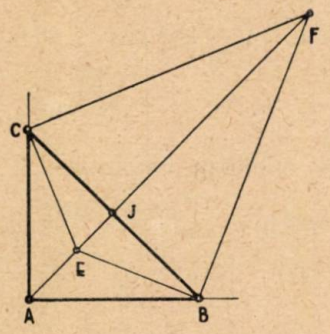
$$\sphericalangle B E J = 90^0 - 22^0, 30' = 67^0, 30',$$

rezultă

$$\sphericalangle B E C = 2 \sphericalangle B E J = 135^0$$

şi prin urmare

$$\sphericalangle B F C = 45^0.$$



Laturile patrulaterului B E C F.

Avem

$$B J = \frac{a}{2}, \quad \sphericalangle E B J = 22^0, 30', \quad \sphericalangle J B E = 67^0, 30'.$$

Din triunghiurile dreptunghice E B J şi F B J, avem

$$B E = \frac{B J}{\cos \widehat{E B J}}, \quad B F = \frac{B J}{\cos \widehat{J B F}},$$

sau

$$B E = \frac{a}{2 \cos 22^0, 30'} = \frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = E C,$$

$$B F = \frac{a}{2 \cos 67^0, 30'} = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = C F,$$

(Complément de Trigonométrie par „F. G. M", p. 34).

Suprafaţa patrulaterului B E C F.

Avem evident

$$S = 2 \text{ suprf. } (E B F) = 2 \frac{\overline{B E} \cdot \overline{B F}}{2} =$$

$$\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Soluţii date de d-ra *Tarţa Valeria* (Polit, Timişoara) şi de d-nii *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Ieşan Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Lupescu Corneliu* (Lt, Roman), *Maliţa A. Mircea* (lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Miclea N.* (Alba-Iulia), *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2170. — Să se găsească suma numerelor multiple de 59, cuprinse între 1000 şi 10000.

PETRE F. IONESCU

2171. — Să se afle cuburile perfecte, care reproduc la dreapta rădăcina cubică a lor.

I. V. MATIES

2172. — Să se rezolve ecuaţia

$$2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

C. TINCU

2173. — Sistemul

$$2(X + Y + Z) = 3(U + V)$$

$$YZ + ZX + XY = 3UV$$

în afară de soluţia evidentă

$$X = Y = Z = 1, \qquad U = V = 1$$

are şi alte soluţii în *numere întregi?*

D. POMPEIU

2174. — Să se rezolve şi să se discute sistemul

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = b^2 \\ (x + y)(z^2 - xy) = 2cxy \end{cases}$$

G-L GH. BUICLIU

2175. — Să se determine constantele a, b, c astfel ca derivata funcţiei

$$(1) \quad y = ax + \frac{20x^2(x+3)}{1+4x^2} - b \log(1+4x^2) - 4c \operatorname{arctg} 2x,$$

să admită rădăcinile — 1, 0 şi 1.

Să se precizeze pentru fiecare din aceste valori, dacă funcţia (1) este maximă sau minimă.

Mai sunt valori ale variabilei x pentru care funcţia (1) admite maxim sau minim?

(Simbolul log înseamnă logaritm neperian).

V. ALACI

2176. — In ce fel de triunghiuri razele cercurilor exînscrise sunt în progresie armonică?

VALERIA TARTA

2177. — Să se afle razele sferei înscrise şi a celei circumscrise unui tetraedru echifacial, în funcţie de muchile lui.

EUGEN VISA

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţii reuşiţi la examenul de admitere în anul I, în ordinea clasificaţiei

(Anul şcolar 1943 – 1944)

1. *Ţigănoiu I. Alexandru*, lic. Bălcescu, Brăila.
2. *Petrea M. Constantin*, lic. V. Alexandri, Galaţi.
3. *Munteanu I. Ioan*, lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
4. *Tarţa V. Valeria*, lic. Carmen Sylva, Timişoara.
5. *Ionescu V. Nicolae*, lic. de băeţi, Slatina
6. *Horodniceaeu N. Nicolăe*, lic. Petru Rareş, P. Neamţ.
7. *Moldovan T. Ioan*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
8. *Drincianu C Valeriu*, lic. C. D Loga, Timişoara.
9. *Mioc R. Silviu*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
10. *Terescenco S. Pavel*, lic. Teoretic de băeţi, C. Albă.
11. *Creţu Gh. Gheorghe*, lic. C. Negruzzi, Iaşi.
12. *Mihăilescu A. C-tin*, lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
13. *Bossie-Vasiliev C. Boris* lic. Alecu Russo, Chişinău.
14. *Muţiu S. Antim.* lic. S. Vulcan, Beiuş.
15. *Pacioglu C. C-tin*, lic. Militar Reg. Ferdinand, Chişinău.
16. *Marinescu G. D-tru*, lic. B. P. Haşdău, Buzău.
17. *Simionescu I Const*, lic. Sf. Sava, Bucureşti.
18. *Goia I. Ioan*, lic. Avram Iancu, Brad.
19. *Hurmuzache C Grigore*, lic. Mihai Viteazul, Bucureşti.
20. *Nicula G. Ioan*, lic. R. Greceanu, Slatina.
21. *Popovici E. Teofil* lic. Moise Nicoară, Arad
22. *Grozescu C. Liviu*, lic. S. Vulcan, Beiuş.
23. *Rădoi N. Nicolae*, lic. Mihai Viteazul, Tg.-Mureş.
24. *Mociouiu N. D-tru*, lic. D. Golescu, Câmpulung M.
25. *Nacu V. Christofor*, lic. Godreanu, Bârlad.
26. *Rădulescu N. Nicolae*, lic. Stirbey, Câmpina.
27. *Vlaicu N. Aurel*, Col. Naţ. Sf. Sava, Bucureşti.
28. *Sabău Gh. Mihai*, lic. Sam. Vulcan, Beiuş
29. *Godea P. Ioan*, lic. Sam. Vulcan, Beiuş.
30. *Ionescu F. Petre*, lic. F-ţii Buzeşti, Craiova.
31. *Marinescu C. C-tin*, lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
32. *Măran I. Anca*, Carmen Sylva, Timişoara.
33. *Mustafolo Al. O. Mihai*, lic. Sf. Sava, Bucureşti.
34. *Anton M. Ioan*, lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
35. *Atanasiu P. Mihai Traian*, lic. Gh. Lazăr, Bucureşti.
36. *Constantinescu N. Nicolae*, lic. B. P. Haşdău, Buzău.
37. *Mândrean A. Mircea*, lic. E. Hurmuzachi, Rădăuţi
38. *Ţapu N. Virgil*, lic. Militar, Cernăuţi
39. *Dumitrescu C. Marin*, lic C. Brătianu, Piteşti.
40. *Iliescu I. Nicolae*, lic. B. P. Haşdău, Buzău
41. *Iliescu Cr. Teodor*, lic. B. P. Haşdău, Buzău.
42. *Maximovici S Ioan*, lic. Traian Doda, Caransebeş.
43. *Petrescu N. Constantin*, lic. B. P. Haşdău, Buzău
44. *Potra I. Florian*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
45. *Deliu N. Mircea*, lic B. P. Haşdeu, Buzău.
46. *Izdrăilă V. Vasile*, lic. Aurel Vlaicu, Orăştie.
47. *Stocoiu G. Spiru*, lic. C D. Loga, Timişoara.
48. *Bondoc I. Ioan*, lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
49. *Trifu Gh. Gheorghe*, lic. I. Maşotă, Braşov.
50. *Fleşeriu P. Ionel-Petru*, lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia.
51. *Nanu C. Gheorghe*, lic. Traian, T.-Severin.
52. *Antonoiu G. C-tin*, lic. Tudor, Vladimirescu, Tg.-Jiu.
53. *Bălan I. Constantin*, lic. Radu Grecianu, Slatina
54. *Caraghiaur St. Eugen*, lic. Alecu Russo, Chişinău
55. *Dimitriu E. Alexandru*, lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia.
56. *Georgescu T. Costică*, lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
57. *Huber Al. Adrian*, lic Mihai Viteazul, Bucureşti.
58. *Pescar Fl. Leontin*, lic. A. Şaguna, Braşov.
59. *Soare D. Simion*, lic. C. Negruzzi, Iaşi.
60. *Strava G. Mircea Ioan*, lic. Unirea, Focşani.
61. *Târziu Gr. Vitalie*, lic. Alecu Russo, Chişinău.
62. *Brezeanu N. Ioan*, lic Moise Nicoară, Arad.
63. *Cârlan T. Ville*, lic. D. P. Haşdău, Buzău.
64. *Dragutin V. Boris*, lic. Alecu Russo, Chişinău.
65. *Iasinschi V. Dan*, lic. Mihail Viteazul, Bucureşti.
66. *Idomir V. Ioan*, „ „ „ „
67. *Pat I. Moise*, lic. Şamuil Vulcan, Beiuş
68. *Ştefănescu T. Ioan*, lic. Sft. Andrei, Bucureşti.
69. *Streţia Al. Alexendru*, lic Ş. Vulcan, Beiuş.
70. *Zăgan V. Vichente*, lic. Radu Negru, Făgăraş
71. *Pascu I. Gheorghe*, „ „ „ „
72. *Penţia I. Tiberiu*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
73. *Radulescu P. Andrei*, lic. Mihai Viteazul, Bucureşti.
74. *Briese O. Radu*, lic. C. Negruzi, Iaşi.
75. *Cucu D. Teodor*, lic. Evanghelic, Bucureşti,
76. *Moise N. Nicolae*, lic. M. Nicoară, Arad.
77. *Opriş N. Ioan Sever*, lic. Radu Negru, Făgăraş.
78. *Vădean G. Nicolae*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
79. *Borcoman I. Mircea*, lic. Avram Iancu, Brad.
80. *Cozlovschi St. Mihail*, lic. de băeţi, Cetatea-Albă.
81. *Drozd I. Stanislau*, lic. Polon, Craiova
82. *Mihăiescu G. Mihai*, lic. Gh. Şincai, Bucureşti.
83. *Miler T. Teodor*, lic. de Stat No. 1, Linz, Germania.
84. *Georgescu-Bârlad V. Dragoş*, lic. Codreanu, Bârlad.
85. *Grabowiecki Vl. Zigmund*, lic. Polonez, Craiova.
86. *Moscu S. Nicolae*, lic. Spiru Haret, Bucureşti.
87. *Ocroş I. Ioan*, lic. Gh. Şincai, Bucureşti.
88. *Peligrad D. Nicolae*, lic. Brătianu, Piteşti.
89. *Popescu C. Constantin*, lic T. Vladimirescu, Tg-Jiu.
90. *Tonciu I. Gheorghe*, lic. Al. Lahovary, R. Vâlcea.
91. *Ţiucra P. Alexandru*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
92. *Brebenariu P. Miron* „ „ „ „ „
93. *Catalina T. Valeriu* „ „ „ „ „
94. *Hariga Gr. Eugen*, lic. Em. Gojdu, Oradea.
95. *Marincaşu V. V-le Ioan*, lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia.
96. *Păunescu T. Gheorghe*, lic. Al. Lahovary, R Vâlcea.
97. *Petcu D. Mircea Liviu*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
98. *Popa C. Spiridon*, lic. Unirea, Focşani.
99. *Rădulescu M. Victor*, lic B. P. Haşdeu, Buzău.
100. *Varna I. Nicolae*, lic. Tim. Cipariu, Dumbraveni.
101. *Chiricuţă V. Nicolae*, lic. Negruzzi Iaşi.
102. *Fudulu St. Gabriel*, lic. N. Bălcescu, Brăila
103. *Grigoriu N. Gheorghe*, lic. V. Alexandri, Galaţi.
104. *Monşca P. Dorin Napoleon*, lic. Roman Vodă, Roman.
105. *Raţiu A. Mircea*, lic. Regele Ferdinand, Turda.
106. *Săftoiu I. Eliodor*, lic. Gh. Lazăr, Bucureşti.
107. *Bântoiu C. Dinu Serban*, lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
108. *Kordzinski St. Czestav*, lic. Polonez, Craiova.
109. *Lupaşcu C. Miroveu*, lic Roman Vodă, Roman.
110. *Palada T. Traian*, lic. E. Văcărescu, Târgovişte.
111. *Tancou I. Mircea*, lic Gh. Lazăr, Sibiu.
112. *Anghel Tr. Pavel*, lic. Traian Doda, Caransebeş.
113. *Belea V, Constantin*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
114. *Garlatti A. Bruno*, lic. Princ. Nicolae, Sighişoara.
115. *Grozescu T. Tib. Titu*, lic. Moise Nicoară, Arad
116. *Nicolescu P. Alexandru*, lic. Teoretic de băeţi, C. Albă.
117. *Opriş P. Ioan*, lic. F-ţii Buzeşti, Craiova.
118. *Purcher I. Iosif*, lic. V-le cel Mare, Blaj.
119. *Scutariu G. Mihai*, lic. Gr. Ghica Dorohoi.
120. *Târlea G. Constantin*, lic. Teoretic, Turnu-Măgurele.
121. *Dorobanţiu N. Virgil*, lic. Gh Lazăr, Sibiu.
122. *Dumitrescu G. Ioan*, lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
123. *Hurbenca S. Nicolae*, lic. Sf. Iosif, Bucureşti.
124. *Ivancu C. C-tin*, lic. F-ţii Buzeşti, Craiova.
125. *Munteanu I. Emil*, lic. Decebal, Deva
126. *Potoceanu N. Tiberiu*, lic. C. D. Loga, Timişoara.

127. *Dolga I. Mircea Lucian*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
128. *Donca V. Vasile*, lic. Al Lahovary, R.-Vâlcea.
129. *Ghebeleş I. Marius*, lic. Moise Nicoară, Arad.
130. *Juncan I. Nicolae*, lic. Titu Maiorescu, Aiud.
131. *Oprişor S. Ioan*, lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
132. *Popa G. Mihai*, lic. Reg. Ferdinand, Turda.
133. *Pop I. Romulus Lucian*, lic. Sf. Vasile cel Mare, Blaj.
134. *Suciu P. Ioan*, lic. Sam. Vulcan, Beiuş.
135. *Tănăsescu G. V. Constantin*, lic. M. Maiorescu, Bucureşti.
136. *Vlad E. Aurel*, lic. Avram Iancu, Brad.
137. *Anghelescu I. Paul*, lic. Nic. Bălcescu, Brăila.
138. *Bucur I. Viorel*, lic Gh. Lazăr, Sibiu.
139. *Demetrescu S. Lucian*, lic. Gh. Lazăr, Bucureşti.
140. *Înoveanu N. Emil*, lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
141. *Mochan I. Ionel*, lic. Princip. Nicolae, Sighişoara.
142. *Moise I. Ioan*, lic. C. Negruzzi, Iaşi.
143. *Monasterianu E. Romeo*, lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
144 *Mustaţă C. Constantin*, lic. Ioniţă Asan, Caracal.
145. *Paloş A. Augustin*, lic. Traian, T.-Severin.
146. *Stănculescu I. Marin*, col. Carol I, Craiova
147. *Stefănescu R. Ioan*, lic. Sft. Andrei, Bucureşti.
148. *Stroca D. Leonard*, lic. Tr. Doda, Caransebeş.
149. *Catalinescu C. Ioan*, lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
150. *Cioşan M. Mihail*, lic. Tr. Doda, Caransebeş
151. *Corbuş D. Ioan*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
152. *Hendli M. Martin*, lic. Ş. Vulcan, Beiuş.
153. *Ionescu I. Ioan*, lic. Dr. I. Maşotă, Braşov.
154. *Lazăr D. Sever*, lic. Decebal, Deva.
155. *Nicoleşcu M. Ioan*, lic C. D. Loga, Timişoara.
156. *Pavel I. Ioan*, lic. Tr. Doda, Caransebeş.
157. *Piţurea I. Ioan Ervin*, col. Carol I, Craiova.
158. *Popp I. Mircea Emilian*, lic. Mihai Viteazul, Bucureşti
159. *Radovan V. Ştefan*, lic. Unirea, Focşani.
160. *Ramis R. Ali*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
161. *Rădulescu S. Corneliu*, lic Radu Negru, Făgăraş.
162. *Salcău S. Simion*, lic Vasile cel Mare, Blaj.
163. *Sava R. Dionisie*, lic. Mihai Viteazul, Bucureşti.
164. *Ţarălungă G. Savel*, lic C. Negruzzi, Iaşi.
165. *Vescia D. Michele*, lic. N. Bălcescu, Brăila.
166. *Brătescu E. I. Vintilă*, lic. Cantemir Vodă, Bucureşti
167. *Codreanu I. Silviu*, lic. Mil. Mivai Viteazul, Timişoara
168. *Dima M. Serban*, lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
169. *Nicola I. Ioan*, lic. Ioniţă Asan, Caracal.
170. *Roşca T. Petre*, Col. Naţional, Bucureşti.
171. *Rovenţa G. Vasile*, lic. Traian, T.-Severin.
172. *Veţu A. Boris*, lic. Sf. Dumitru, Ismail.
173. *Băditoiu N. Aurel*, lic Andrei Şaguna, Braşov.
174. *Cristescu N. Nicolae*, lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
175. *Dârlău I. Ioan*, lic. Gh. Şincai, Bucureşti.
176. *Disela P. Nicolae*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
177. *Dumitrescu Boscu I. Stelian*, lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
178. *Gojnea C. Constantin*, lic. Dinu Golescu, C. Lung M.
179. *Golfitescu M. Constantin*, lic. Traian, T.-Severin.
180. *Stefureac V. Gheorghe*, lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
181. *Toma S. Gheorghe*, lic. Moise Nicoară, Arad.
182. *Vasiiescu C. Mihai*, lic. Sf. Iosif, Bucureşti.
183. *Ardelean N. Mircea*, lic. Moise Nicoară, Arad.
184. *Dumitrescu V. Gheorghe*, lic. Eminescu, Bucureşti.
185. *Marinescu N. Constantin*, lic. Sf. Iosif, Bucureşti.
186 *Mihai Gr. Gheorghe*, lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
187. *Mihăiescu I. Ionel*, col. Carol I, Craiova.
188. *Noaghiu I. Corneliu*, lic. Gh. Lazăr, Sibiu
189. *Stiassny L. Ludovic*, lic. Prinz Eugen, Timişoara.
190. *Veisa O. Alexandru*, col. Naţional, Iaşi
191. *Brătescu D. Vincius C-tin*, lic. I. C. Brătianu, Piteşti.
192. *Dănciulescu T. Gh. Marian*, lic. Sf Lahovari, R Vâlcea.
193. *Dragoş M Viorel*, lic. C. D. Loga, Timişoara.
194. *Enescu A. Cornel*, lic. Teoretic, Piteşti.
195. *Fătu G. Virgil*, lic. Bălcescu, Brăila.
196. *Lates I. Ioan Mircea*. lic. Naţional, Iaşi.
197. *Mezin P. Iiberiu*, lic. D. Loga, Timişoara.
198. *Oroianu G. Sava*, lic. Industrial, Arad.
199. *Popescu N. Eug. Ionel*, lic. Gh. Lazăr, Bucureşti.
200 *Popescu I. Marcel*, lic. Milit. D. Sturdza, Craiova.
201. *Scheaucu V. Nicolae*, lic T. Maiorescu Bucureşti.
202. *Zaharie V. Vasile*, lic. Ghica Vodă, Dorohoi.
203. *Iftimoaia N. Nicolae*, lic. Rareş, P.-Neamt.

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzlete care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXII, cu preţul de lei 300 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

ANUL XXIII. NOEMVRIE 1943 No. 9.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: RELATIUNI REMARCABILE INTR'UN TRIUNGHIU (URMARE).
2. NOTE MATEMATICE 22, 23, 24.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1912, 1914, 1924, 1933.
6. PROBLEME PROPUSE: 2178–2185.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 – 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile, problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 9 TIMISOARA, NOEMVRIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

RELAȚIUNI REMARCABILE ÎNTR'UN TRIUNGHIU

DE

V. ALACI

(urmare)

PARTEA II-a.

In continuare, vom stabili *alte relații remarcabile între elementele unui triunghiu, relații noui în majoritate*, cu un caracter mai general ca acelea deja stabilite.

5. In acest scop, considerăm relațiile (3) din prima parte și le multiplicăm pe rând cu $e^{2i\theta}$, $e^{2i\theta}$, $e^{3i\theta}$, $e^{4i\theta}$, unde θ este un unghiu oarecare, iar $i=\sqrt{-1}$; obținem astfel respectiv:

$$c^2 e^{2i\theta} = 4n^2 e^{-2i(\gamma-\theta)} + 4lm\, e^{i(\alpha-\beta+2\theta)}$$

$$c^2 e^{2i\theta} = m^2 e^{-2i(\beta-\theta)} + l^2 e^{2i(\alpha+\theta)} + 2lm\, e^{i(\alpha-\beta+2\theta)}$$

$$(3') \quad c^3 e^{3i\theta} = m^3 e^{3i(\beta-\theta)} + l^3 e^{3i(\alpha+\theta)} + 3clm\, e^{i(\alpha-\beta+3\theta)}$$

$$4c^2 n^2 e^{-2i(\gamma-2\theta)} = m^4 e^{-4i(\beta-\theta)} + l^4 e^{4i(\alpha+\theta)} - 2l^2 m^2 e^{2i(\alpha-\beta+2\theta)}.$$

Observare. Din punct de vedere geometric, operația efectuată, revine la a lua în locul axei A B (în figura care cuprinde triunghiul A B C din prima parte a acestei lucrări), o altă axă de același senz, ce face cu ea un unghiu oarecare θ, a scri apoi relațiile (1) corespunzătoare și a le înlocui în identitățile (2).

6. Dacă acum, în relațiile (3') egalăm părțile reale și pe acelea imaginare obținem:

$$(III) \quad \left|\begin{array}{c} c^2\cos 2\theta = 4[n^2\cos 2(\gamma-\theta) + lm\cos(\alpha-\beta+2\theta)] \\ c^2\cos 2\theta = m^2\cos 2(\beta-\theta) + l^2\cos 2(\alpha+\theta) + 2lm\cos(\alpha-\beta+2\theta) \\ c^3\cos 3\theta = m^3\cos 3(\beta-\theta) + l^3\cos 3(\alpha+\theta) + 3clm\cos(\alpha-\beta+3\theta) \\ 4c^2n^2\cos 2(\gamma-2\theta) = m^4\cos 4(\beta-\theta) + \\ l^4\cos 4(\alpha+\theta) - 2l^2m^2\cos 2(\alpha-\beta+2\theta) \end{array}\right|,$$

$$(IV) \quad \left|\begin{array}{c} c^2\sin 2\theta = 4[n^2\sin 2(\theta-\gamma) + lm\sin(2\theta+\alpha-\beta)] \\ c^2\sin 2\theta = m^2\sin 2(\theta-\beta) + l^2\sin 2(\theta+\alpha) + 2lm\sin(2\theta+\alpha-\beta) \\ c^3\sin 3\theta = m^3\sin 3(\theta-\beta) + l^3\sin 3(\theta+\alpha) + 3clm\sin 3(\theta+\alpha-\beta) \\ 4c^2n^2\sin 2(2\theta-\gamma) = m^4\sin 4(\theta-\beta) + \\ l^4\sin 4(\theta+\alpha) - 2l^2m^2\sin 2(2\theta+\alpha-\beta) \end{array}\right|,$$

In aceste relații, elementele lineare și acelea unghiulare au aceiași semnificare, ca acelea din prima parte a lucrării, relative la figura de acolo, și anume, l, m, n sunt lungimele vectorilor, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC'}$; c este lungimea laturei A B; apoi α, β, γ, sunt respectiv unghiurile $\widehat{BAO}$, $\widehat{ABO}$ și $\widehat{AC'O}$, iar θ este unghiul ce l'ar face o axă oarecare Ax' cu Ax.

7. Referindu-ne la figura din prima parte, vom particulariza acum poziția punctului O, în planul triunghiului A B C și vom scri ce devin relațiile (III) și (IV).

Pentru a obține relații mai simple, vom particulariza convenabil și unghiul θ.

1°. Cazul când O coincide cu vârful C.

In acest caz, din figura corespunzătoare, avem evident:

$\alpha = A$, $\beta = B$, $l = b$, $m = a$, $n = m_c$ (mediana din C).

De asemeni, particularizăm și pe θ, luând de exemplu $\theta = \frac{B-A}{2}$ pentru toate relațiile din (III) și (IV), exceptând relația 3-a din (III) și (IV), pentru care luăm, $\theta = \frac{B-A}{3}$.

In virtutea acestor date și în urma unor ajustări convenabile, relațiile (III) și (IV), devin respectiv:

$$(H)\quad \begin{array}{c} c^2 \cos(B-A) = 4[a b + m_c \cos(A-B+2\gamma)] \\ c^2 \cos(B-A) = 2 a b - (a^2 + b^2)\cos C \\ \Sigma a^3 \cos(B-C) = 3 a b c \\ 4 c^2 m_c^2 \cos 2(A-B+\gamma) = \\ (a^4 + b^4)\cos 2C - 2 a^2 b^2 \end{array},$$

$$(H_1)\quad \begin{array}{c} c^2 \sin(B-A) = 4 m_c^2 \sin(B-A-2\gamma) \\ c^2 \sin(B-A) = (b^2 - a^2)\sin C \\ \Sigma a^3 \sin(B-C) = 0 \\ 4 c^2 m_c^2 \sin 2(B-A-\gamma) = (a^4 - b^4)\sin 2C \end{array}.$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *ducem mediana* $C C' = m_c$ *și notăm* $\sphericalangle A C' C = \gamma$, *atunci, păstrând notațiile obicinuite, avem relațiile* (H) *și* (H_1).

2°. Cazul când O coincide cu A', mijlocul laturei B C.

In acest caz, din figura corespunzătoare, avem evident:

$\beta = B$, $\gamma = \pi - A$, $l = m_a$ (mediana din A),

$$m = \frac{a}{2}, \quad n = \frac{b}{2}.$$

Să particularizăm și pe θ, luând de exemplu $\theta = \frac{B}{2}$ pentru toate relațiile din (III) și (IV), exceptând relația 3-a din (III) și (IV), pentru care luăm $\theta = \frac{B}{3}$.

In virtutea acestor date, relațiile (III) și IV) devin respectiv:

$$(I)\quad \begin{array}{c} c^2 \cos B + b^2 \cos(C-A) = 2 a m_a \cos\alpha \\ (4c^2 - a^2)\cos B = 4 m_a [a\cos\alpha + m_a \cos(2\alpha + B)] \\ 8 c^3 \cos B - a^3 \cos 2B = \\ 4 m_a [3 a c \cos\alpha + 2 m_a^2 \cos(3\alpha + B)] \\ 16 b^2 c^2 \cos 2C - a^4 \cos 2B = \\ 8 m_a^2 [2 m_a^2 \cos 2(2\alpha + B) - a^2 \cos 2\alpha] \end{array},$$

$$(I_1)\quad \begin{array}{c} c^2 \sin B - b^2 \sin(C-A) = 2 a m_a \sin\alpha \\ 4c^2 + a^2)\sin B = 4 m_a [a\sin\alpha + m_a \sin(2\alpha + B)] \\ 8 c^3 \sin B + a^3 \sin 2B = \\ 4 m_a [3 a c \sin\alpha + 2 m_a^2 \sin(3\alpha + B)] \\ 16 b^2 c^2 \sin C - a^4 \sin 2B = \\ 8 m_a^2 [a^2 \sin 2\alpha - 2 m_a^2 \sin 2(2\alpha + B)] \end{array}.$$

Putem astfel enunța următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *ducem mediana* $A A' = m_a$ *și notăm* $\sphericalangle B A A' = \alpha$, *celelalte notații fiind obicinuite, atunci avem relațiile* (I) *și* (I_1).

3°. Cazul când O coincide cu A', piciorul bisectoarei din A.

In acest caz, construind figura corespunzătoare, avem

$\alpha = \frac{A}{2}$, $\beta = B$, $l = l_a$ (bisectoarea din A),

$m = A' B = \frac{a c}{b + c}$ (din teorema bisectoarei

$n = \frac{c \sin \frac{A}{2}}{2 \sin\left(\gamma + \frac{A}{2}\right)}$ (din teorema sinusurilor în triunghiul A C' A')

Să particularizăm și pe θ, luând de exemplu

$$\theta = \frac{B}{2} - \frac{A}{4},$$

pentru toate relațiile din (III) și (IV), exceptând relația a 3-a din (III) și (IV), pentru care luăm

$$\theta = \frac{B}{3} - \frac{A}{6}.$$

In virtutea acestor date, relațiile (III) și (IV) devin respectiv

(J)
$$\cos\left(B-\frac{A}{2}\right) =$$
$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right)}\cos\left(B-\frac{A}{2}-2\gamma\right)+\frac{4\,a\,l_a}{c(b+c)}$$
$$\cos\left(B-\frac{A}{2}\right) =$$
$$\left[\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{l_a^2}{c^2}\right]\sin\frac{C-B}{2}+\frac{2\,a\,l_a}{c(b+c)}$$
$$\cos\left(B-\frac{A}{2}\right) =$$
$$\frac{a^3}{(b+c)^3}\sin\frac{C-3B}{2}-\frac{l_a^3}{c^3}\cos C+\frac{3\,a\,l_a}{c(b+c)}$$
$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right)}\cos(2B-A-2\gamma)+$$
$$\left[\frac{a^4}{(b+c)^4}+\frac{l_a^4}{c^4}\right]\cos(C-B)+\frac{2\,a^2\,l_a^2}{c^2(b+c)^2}=0$$

(J$_1$)
$$\sin\left(B-\frac{A}{2}\right)\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right) =$$
$$\sin^2\frac{A}{2}\sin\left(B-\frac{A}{2}-2\gamma\right)$$
$$\sin\left(B-\frac{A}{2}\right)=\left[\frac{l_a^2}{c^2}-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]\cos\frac{C-B}{2}$$
$$\frac{l_a^2}{c^3}\sin C=\sin\left(B-\frac{A}{2}\right)+\frac{a^3}{(b+c)^3}\cos\frac{C-3B}{2}$$
$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\left(\gamma+\frac{A}{2}\right)}\sin 2\left(B-\frac{A}{2}-\gamma\right)=$$
$$\left(\frac{a^4}{(b+c)^4}-\frac{l_a^4}{c^4}\right)\sin(B-C)$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Intr'un triunghiu A B C, *în care s-a dus bisectoarea* A A′ $= l_a$, *s-a notat* $\sphericalangle$ A C′ A′ $= \gamma$ (C′ *mijlocul lui* A B) *și s-au păstrat notațiile obicinuite, există totdeauna relațiile* (J) *și* (J$_1$).

4°. Cazul când O coincide cu A′, piciorul înălțimei din A

In acest caz, construind figura corespunzătoare, avem:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - B,\ \beta = B,\ \gamma = 2B,\ l = h_a \text{ înălțimea din A),}$$
$$m = c\cos B,\ n = \frac{c}{2}.$$

Particularizăm și pe θ, luând de exemplu $\theta = -A$.

Invirtutea acestor date, relațiile (III) și (IV) devin respectiv:

(K)
$$c\cos 2A + 4\,h_a\cos B\sin 2C = c\cos 2(C-B)$$
$$c^2\cos 2A + 2ch_a\cos B\cos 2C = (c^2\cos^2 B - h_a^2\cos 2C$$
$$\cos 3A + \cos^3 B\cos 3C =$$
$$\frac{h_a^3}{c^3}\sin 3C - 3\frac{h_a}{c}\cos B\sin(2C-A)$$
$$c^4 - h_a^4 = c^2\cos^2 B\,(c^2\cos^2 B + 2h_a^2)$$

(K$_1$)
$$\sin 2B - C - \sin 2A = 4\frac{h_a}{c}\cos B\cos 2C$$
$$\left(\frac{h_a^2}{c^2}-\cos^2 B\right)\sin 2C = \sin 2A +$$
$$2\frac{h_a}{c}\cos B\cos 2C$$
$$\cos^3 B\sin 3C - \sin 3A =$$
$$\frac{h_a}{c}\left[3\cos B\cos(2C-A)+\frac{h_a^2}{c^2}\cos 3C\right]$$
$$c^4 - h_a^4 = c^2\cos^2 B\,(2h_a^2 + c^2\cos^2 B)$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *ducem înălțimea* A A′ $= h_a$, *atunci, păstrând notațiile obicinuite, avem relațiile* (K) *și* (K$_1$).

5°. Cazul când O coincide cu ortocentrul H al triunghiului.

In acest caz, construind figura corespunzătoare, avem:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - B, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - A, \quad l = \frac{c \cos A}{\sin C} =$$

$$a \operatorname{cotg} A, \quad m = b \operatorname{cotg} B.$$

Să particularizăm şi pe θ, luând de exemplu $\theta = \frac{B-A}{2}$ pentru toate relaţiile din (III) şi (IV), exceptând relaţia a 3-a din (III) şi (IV), pentru care luăm $\theta = \frac{B-A}{3}$.

In virtutea acestor date, relaţiile (III) şi (IV) devin respectiv:

$$(L)\quad \boxed{\begin{array}{c} c^2 \cos(B-A) = \\ 4[n^2 \cos(B-A-2\gamma) + ab \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B] \\ c^2 \cos(B-A) = \\ (a^2 \operatorname{cotg}^2 A + b^2 \operatorname{cotg}^2 B) \cos C + 2ab \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \\ c^3 \cos(B-A) = a^3 \operatorname{cotg}^3 A \sin(C-B) + \\ b^3 \operatorname{cotg}^3 B \sin(C-A) + 3abc \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \\ 4c^2 n^2 \cos 2(A-B+\gamma) = \\ (a^4 \operatorname{cotg}^4 A + b^4 \operatorname{cotg}^4 B) \cos 2C - \\ 2a^2 b^2 \operatorname{cotg}^2 A \operatorname{cotg}^2 B \end{array}},$$

$$(L_1)\quad \boxed{\begin{array}{c} c^2 \sin(B-A) = 4n^2 \sin(B-A-2\gamma) \\ c^2 \sin(B-A) = (a^2 \operatorname{cotg}^2 A - b^2 \operatorname{cotg}^2 B) \sin C \\ c^3 \sin(B-A) = \\ a^3 \operatorname{cotg}^3 A \cos(C-B) - b^3 \operatorname{cotg}^3 B \cos(C-A) \\ 4c^2 n^2 \sin 2(B-A-\gamma) = \\ (a^4 \operatorname{cotg}^4 A - b^4 \operatorname{cotg}^4 B) \sin 2C \end{array}}.$$

Putem enunţa astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *unim ortocentrul* H *cu mijlocul* C′ *al laturei* A B *şi notăm* H C′ = n, ∢ A C′ H = γ, *celelalte notaţii fiind obicinuite, atunci există totdeauna relaţiile* (L) *şi* (L_1)

6°. Cazul când O coincide cu centrul cercului înscris.

In acest caz, construind figura corespunzătoare, avem:

$$\alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B}{2}, \; l = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, m = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, n = \frac{r}{\sin \gamma}.$$

Să particularizăm şi pe θ, luând de exemplu $\theta = \frac{B-A}{4}$ pentru toate relaţiile din (III) şi (IV), exceptând relaţia a 3-a din (III) şi (IV), pentru care luăm $\theta = \frac{B-A}{6}$.

In virtutea acestor date, relaţiile (III) şi (IV) devin respectiv:

$$(M)\quad \boxed{\begin{array}{c} \dfrac{c^2}{r^2} \cos \dfrac{B-A}{2} = 4 \left[\operatorname{cosec} \dfrac{A}{2} \operatorname{coses} \dfrac{B}{2} + \dfrac{\cos\left(\dfrac{B-A}{2} - 2\gamma\right)}{\sin^2 \gamma} \right] \\ \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{B}{2}} + \dfrac{2}{\sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}} = \dfrac{\cos \dfrac{B-A}{2}}{\sin \dfrac{C}{2}} \dfrac{c^2}{r^2} \\ \dfrac{\sin \dfrac{C-A}{2}}{\sin^3 \dfrac{A}{2}} + \dfrac{\sin \dfrac{C-B}{2}}{\sin^3 \dfrac{B}{2}} + \dfrac{3}{\sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2}} \cdot \dfrac{c}{r} = \dfrac{c^3}{r^3} \cos \dfrac{B-A}{2} \\ \dfrac{1}{\sin^4 \dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^4 \dfrac{B}{2}} + \dfrac{2}{\sin^2 \dfrac{A}{2} \sin^2 \dfrac{B}{2} \cos C} + 4 \dfrac{\cos(B-A-2\gamma)}{\sin^2 \gamma \cos C} \cdot \dfrac{c^2}{r^2} = 0 \end{array}},$$

$$(M_1)\quad \left|\begin{array}{l} 4\dfrac{\sin\left(\dfrac{B-A}{2}-2\gamma\right)}{\sin^2\gamma}=\dfrac{c^2}{r^2}\sin\dfrac{B-A}{2} \\ \\ \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}\cdot\dfrac{c^2}{r^2} \\ \\ \dfrac{\cos\dfrac{C-A}{2}}{\sin^3\dfrac{A}{2}}-\dfrac{\cos\dfrac{C-B}{2}}{\sin^3\dfrac{B}{2}}=\dfrac{c^3}{r^3}\sin\dfrac{B-A}{2} \\ \\ \dfrac{1}{\sin^4\dfrac{A}{2}}-\dfrac{1}{\sin^4\dfrac{B}{2}}=4\dfrac{\sin(B-A-2\gamma)}{\sin^2\gamma\sin C}\cdot\dfrac{c^2}{r^2} \end{array}\right| .$$

Putem enunța astfel următoarea problemă.

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *în care notațiile sunt obicinuite, unim centrul cercului înscris* O *cu mijlocul* C′ *al laturei* A B *și notăm* $\sphericalangle$ A C′ O = γ, *atunci avem relațiile* M_1 *și* (M_1).

7°. Cazul când O coincide cu centrul unuia din cercurile exînscrise.

Construim figura necesară și presupunem de exemplu că O coincide cu centrul O_a al cercului exinscris, corespunzător laturei a.

In acest caz, din figura construită, se observă că avem

$$\alpha=\frac{A}{2},\qquad \beta=\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2},\qquad l=\frac{r_a}{\sin\dfrac{A}{2}},$$

$$m=\frac{r_a}{\cos\dfrac{B}{2}},\qquad n=\frac{r_a}{\sin\gamma}.$$

Să particularizăm și pe θ, luând de exemplu $\theta=\dfrac{B-A}{4}$ pentru toate relațiile din (III) și (IV), exceptând relația a 3-a din (III) și (IV), pentru care luăm $\dfrac{B-A}{6}$.

In virtutea acestor date, relațiile (III) și (IV) devin respectiv:

$$(N)\quad \left|\begin{array}{l} 4\dfrac{\cos\left(\dfrac{B-A}{2}-2\gamma\right)}{\sin^2\gamma}=\dfrac{c^2}{r_a^2}\cos\dfrac{B-A}{2} \\ \\ \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{B}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{B-A}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}\cdot\dfrac{c^2}{r_a^2} \\ \\ \dfrac{\sin\dfrac{C-A}{2}}{\sin^3\dfrac{A}{2}}+\dfrac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\cos^3\dfrac{B}{2}}=\dfrac{c^3}{r_a^3}\cos\dfrac{B-A}{2} \\ \\ \dfrac{1}{\sin^4\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos^4\dfrac{B}{2}}=\dfrac{2}{\sin^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{B}{2}\cos C}-4\dfrac{\cos(B-A-2\gamma)}{\sin^2\gamma\cos C}\cdot\dfrac{c^2}{r_a^2} \end{array}\right| ,$$

$$4\left[\frac{\sin(B-A-2\gamma)}{\sin^2\gamma}-\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right]=\frac{c^2}{r_a^2}\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}-\frac{2}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{c^2}{r_a^2}$$

(N_1)

$$\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}}-\frac{3}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{c}{r_a}=\frac{c^3}{r_a^3}\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\frac{1}{\sin^4\frac{A}{2}}-\frac{1}{\cos^4\frac{B}{2}}=4\frac{\sin(B-A-2\gamma)}{\sin^2\gamma\sin C}\cdot\frac{c^2}{r_a^2}$$

Putem enunța astfel următoarea problemă:

Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, *în care notațiile sunt obicinuite, unim centrul cercului ex-înscris* O_a *cu mijlocul* C′ *al laturei* A B *și notăm* $\sphericalangle$ A C′ $O_a = \gamma$, *atunci avem relațiile* (N) *și* (N_1)

7. Identitățile trigonometrice ce le-am stabilit până acum între elementele unui triunghiu, dintre care unele sunt noui și remarcabile, credem că sunt suficiente pentru a pune în lumină metoda simplă și unitară ce am folosit pentru obținerea lor.

NOTE MATEMATICE

22. — *Sur une méthode permettant de résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^2+axy+by^2=z^k$$

pour toute valeur entière et positive de k.

A. On a l'identité

$$(m^2+amn+bn^2)(p^2+apq+bq^2)=r^2+ars+bs^2,$$

avec

$$r=mp-bnq$$
$$s=np+(m+an)q.$$

Si donc on connait une solution (x_k, y_k) de l'équation

$$x^2+axy+by^2=z^k,$$

on en déduit une de l'équation

$$x^2+axy+by^2=z^{k+1}$$

par les formules

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} x_{k+1}=mx_k-bny_k \\ y_{k+1}=nx_k+(m+an)y_k \end{cases}$$

z doit toujours avoir l'expression $m^2+amn+bn^2$.

Si l'on considère l'équation

$$x^2+axy+by^2=z \quad (k=1),$$

on a la solution triviale $x_1=m$, $y_1=n$.

Pour $k=2$, par exemple, on trouve la solution générale:

$$\begin{cases} x_2=mx_1-bny_1=m^2-bn^2 \\ y_2=nx_1+(m+an)y_1=2mn+an^2. \end{cases}$$

Ce procédé permet d'obtenir la solution générale, exprimée à l'aide de 2 paramètres arbitraires, m et n, de toute équation de la forme considérée. Des formules générales donnant les expressions de x_k et y_k pour n'importe quelle valeur entière et positive de k seront publiées dans Mathesis (Bruxelles). Nous les y avons données déjà pour $k=4$ (voir Mathesis, 1937, p. 332—333).

B. Nous allons appliquer le procédé au cas par-particulier où

$$a=-1, \quad b=2, \quad m=2, \quad n=1.$$

On trouve alors les identités suivantes:

$$2^2-2.3+2.3^2=4^2=16$$
$$2^2+2.5+2.5^2=4^3=64$$
$$14^2+14.3+2.3^2=4^4=256$$

$$34^2 - 34.11 + 2.11^2 = 4^5 = 1024$$
$$46^2 - 46.45 + 2.45^2 = 4^6 = 4096$$
$$2^2 - 2.91 + 2.91^2 = 4^7 = 16384$$
$$178^2 + 178.93 + 2.93^2 = 4^8 = 65536$$
$$542^2 - 542.85 + 2.85^2 = 4^9 = 262.144$$
$$914^2 - 914.627 + 2.267^2 = 4^{10} = 1.048.576$$
$$574^2 - 574.1541 + 2.1541^2 = 4^{11} = 4.194.304$$
$$1934^2 + 1934.2115 + 2.2115^2 = 4^{12} = 16.777.216$$
$$8098^2 + 8098.181 + 2.181 + 2,181^2 = 4^{13} = 67.108.864$$
$$16558^2 - 16558.7917 + 2.7917^2 = 4^{14} = 268.435.456$$
$$17282^2 - 17282.24475 + 2.24475^2 = 4^{15} = 1.073.741.824$$

etc.

On peut déduire une solution de la précédente par l'application des formules (α) qui deviennent ici :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 2(x_k - y_k), \\ y_{k+1} = x_k + y_k. \end{cases}$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

23. — *Zur unbestimmten Analysis.*

Die Gleichungen

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$$
$$A.B.C = D.E.F$$
$$A + B = C$$

haben die Lösungen

$$A = p\,(p^2 - q^2)(p+q)^2 m^2 - 2s(p+q)(p^2 - q^2)mn - q s^2 (2p+q) n^2\}$$
$$B = q\,\{(p^2 - q^2)(p+q)^2 m^2 + 2qs(p+q)(2p+q)mn - q s^2 (2p+q) n^2\}$$
$$C = (p+q)\{p^2 - q^2)(p+q)^2 m^2 + q s^2 (2p+q) n^2\}$$
$$D = (p+q)\{(p^2 - q^2)(p+q)^2 m^2 - 2s(p+q)(p^2 - q^2)mn - q s^2 (2p+q) n^2\}$$
$$E = p\,\{(p^2 - q^2)(p+q)^2 m^2 + 2qs(p+q)(2p+q)mn - q s^2 (2p+q) n^2\}$$
$$F = q\,(p^2 - q^2)(p+q)^2 m^2 + q s^2 (2p+q) n^2\},$$

vobei

$$m = -qs(2p+q)$$
$$n = p^3 - 3pq^2 - q^3$$

sind

$$p = 2, q = 1, s = 1, m = -5, n = 1:$$
$$13^2 + 38^2 + 51^2 = 17^2 + 26^2 + 57^2 = 4214$$
$$13.38.51 = 17.26.57 = 25194$$
$$13 + 38 = 51,$$

$$p = 3, q = -1, s = 1, m = 5, n = 19:$$
$$47^2 + 87^2 + 134^2 = 58^2 + 67^2 + 141^2 = 27734$$
$$47.87.134 = 58.67.141 = 547921$$
$$47 + 87 = 134$$

$$p = 4, q = -3, s = 1, m = 15, n = -17:$$
$$23^2 + 316^2 + 339^2 = 69^2 + 79^2 + 452^2 = 215306$$
$$23.316.339 = 69.79.452 = 2463852$$
$$23 + 316 = 339$$

$$p = 5, q = -3, s = 1, m = 21, n = 17:$$
$$123^2 + 422^2 + 545^2 = 205^2 + 218^2 + 633^2 = 490238$$
$$123.422.545 = 205.218.633 = 28288770$$
$$123 + 422 = 545$$

$$p = 3, q = 1, s = 2, m = -14, n = 17$$
$$161^2 + 2212^2 + 2373^2 = 483^2 + 553^2 + 3164^2 = 10549994$$
$$161.2212.2373 = 483.553.3164 = 845101236$$
$$161 + 2212 = 2373$$

JOHANNES MAHRENHOLZ
(COTTBUS)

---

24. — *Relaţiuni metrice într'un triunghiu dreptunghic.*

Dacă notăm cu a, b, c respectiv ipotenuza şi cele două catete ale unui triunghiu dreptunghic, se cunoaşte următoarea relaţie metrică, datorită lui *Pitagora*.

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Această relaţie se poate scrie şi astfel

$$(1) \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{c}{a-b}.$$

Dacă aplicăm acestei egalităţi, diferite proprietăţi ale proporţiilor, putem deduce alte relaţiuni între elementele a, b şi c.

Pentru a se putea urmări mai cu uşurinţă şi pentrucă proprietăţile proporţiilor de cari mă voi folosi sunt tratate foarte răsleţit, unele fiind mai puţin cunoscute, voi aminti pe cele mai interesante şi de cari mă folosesc.

Dacă avem egalitatea

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

avem şi următoarele egalităţi:

1. $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{A+C}{B+D}=\frac{A-C}{B-D},$$

2. $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{mA+nC}{mB+nD},$$

3. $$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D},$$

4. $$(AB+CD)^2=(A^2+C^2)(B^2+D^2),$$

5. $$\frac{AB}{CD}=\left(\frac{A+B}{C+D}\right)^2,$$

6. $$\sqrt{AB}+\sqrt{CD}=\sqrt{(A+C)(B+D)},$$

7. $$AC-BD=(A+B)(C-D),$$

8. $$\frac{mA^2B+nAB^2}{mC^2D+nCD^2}=\frac{rC^3+sB^3}{rC^3+sD^3},$$

9. $$\frac{(A^2+B^2)(A+B)}{A^3}=\frac{(C^2+D^2)(C+D)}{C^3},$$

10. $$\frac{(a-b)^4}{(c-d)^4}=\frac{a^4+b^4}{c^4+b^4}$$

m, n, r şi s fiind numere oarecari.

Având în vedere aceste proprietăţi, din egalitatea (1) se deduc următoarele relaţiuni între laturile a, b, c ale unui triunghiu dreptunghic.

1°. $(a+b)(p-b)=cp$, $(a+b)(p-a)=c(p-c)$,

$(a-b)p=c(p-b)$, $(a-b)(p-c)=c(p-a)$,

2°. $$\frac{a+b}{c}=\frac{c}{a-b}=\frac{m(a+b)+nc}{mc+n(a-b)},$$

3°. $$p(p-a)=(p-c)(p-b),$$

4°. $(a^2+b^2+c^2+2ab)(a^2+b^2+c^2-2ab)=4a^2c^2$,

5°. $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{p^2}{(p-b)^2}$$

6°. $$\sqrt{c(a+b)}+\sqrt{c(a-b)}=2\sqrt{p(p-b)},$$

7°. $$2p(p-a)=bc,$$

8°. $$\frac{m(a+b)^2+n(a+b)c}{m(a-b)c+n(a-b)^2}=\frac{r(a+b)^3+sc^3}{rc^3+s(a-b)^3},$$

9°. $$\frac{p(a^2+b^2+c^2+2ab)}{(a+b)^3}=\frac{(p-b)(a^2+b^2+c^2-2ab)}{c^3},$$

10°. $$\frac{(p-c)^4}{(p-a)^4}=\frac{(a+b)^4+c^4}{(a-b)^4+c^4}.$$

IONEL STAMATE

CHESTIUNI PROPUSE LA AL 2-LEA EXAMEN DE ADMITERE IN ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA, 1943.

GEOMETRIE

I.

Se consideră un triunghiu echilateral ABC în care ducem înălţimea AD scoborâtă din A pe BC. Perpendiculara scoborâtă din D pe AB întâlneşte paralela dusă prin A la BC în M. Notând cu $2a$ latura triunghiului echilateral, se cere;

1. Să se calculeze în funcţie de a suprafaţa triunghiului BDM.
2. Să se arate că AM=3 '.
3. Să se calculeze BM în funcţie de a.

II.

Se consideră în raport cu axele perpendiculare Ox, Oy, cercul cu centrul în origină şi de rază R. Acest cerc taie axa Ox în punctele A, A' iar axa Oy în punctele B, B'. Prin A ducem o secantă variabilă de coeficient unghiular m care taie cercul în D, iar pe BB' în C. Fie I, I' centrele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor BCD şi B'CD.

1. Să se arate că BI este perpendiculară pe IC.
2. Să se arate că suma razelor cercurilor de centre I şi I' este constantă şi egală cu latura pătratului înscris în cercul de centru O.
3. Se cere locul geometric al punctului I'.

(9 Octomvrie, orele $8^1/_2$—$11^1/_2$).

ALGEBRĂ

I.

Să se determine a astfel ca funcţia

(1) $$y=\frac{x^2+(x-1)^2}{x^2+(x+1)^2}+a\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x+1},$$

să admită un minim pentru $x=0$.

Inlocuind pe a cu valoarea găsită, să se calculeze maximul şi minimul funcţiei (1).

II.

Să se determine A astfel ca expresia

$$E=\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}-Ax,$$

să admită o limită finită şi bine determinată pentru $x=\infty$.

III.

Să se determine m astfel ca ecuaţia

(1) $$x^3(x^2-4x+13)+x^2-mx+13=0,$$

să admită rădăcina $2+3i$ unde $i=\sqrt{-1}$.

Inlocuind în ecuaţia (1) pe m cu valoarea găsită, să se rezolve complet ecuaţia.

(9 Octomvrie, orele 4—7).

TRIGONOMETRIE

I.

Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, cunoscând un ungiu A, latura opusă a, precum şi raportul celorlalte două $\frac{b}{c} = k$ Discuţie.

II.

Unui cerc de rază R i se duce o tangentă AT, într'un punct A. Se duce în acest cerc o coardă BC, căreia îi corespunde unghiul la centru 2α.

a. Să se calculeze, în funcţie de R şi α, lungimea coardei BC şi distanţa ei de centrul cercului.

b. Fie M mijlocul coardei BC: din B, M, C se duc perpendicularele BB′, MM′, CC′ pe tangenta AT; să se determine poziţia coardei BC aşa fel ca suprafaţa trapezului BB′CC′ să aibă o valoare dată, a^2. Discuţie. Se va lua că necunoscută unghiul φ pe care-l face OM cu OA.

III.

Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 11x - 2\sqrt{2}\cos 5x \sin x + \sin x = 0.$$

(10 Octomvrie, orele $8^1/_2$—$11^1/_2$).

In loc de examen oral, s-au dat înscris următoarele chestiuni.

GEOMETRIE

1. Pe prelungirea unui segment $AB = a$, se ia segmentul $BC = b$. Pe AB şi AC ca diametre se descriu două semicercuri care sunt tăiate de o secantă ce trece prin A respectiv în M şi N. Tangentele în M şi N la cele două semicercuri taie pe AB în P şi Q. Se cere să se calculeze raportul $\frac{AP}{AQ}$ în funcţie de a şi b.

2. Se consideră un tetraedru regulat SABC (având toate muchiile egale). Să se arate că proiecţia vârfului S pe bază, este punctul de întâlnire al înălţimilor triunghiului ABC.

3. Presupunându-se demonstrată proprietatea dela problema precedentă, să se calculeze volumul tetraedrului cunoscând lungimea a a muchei.

4. Să se găsească ecuaţia cercului tangent la dreapta: $x + 2y - 1 = 0$ în punctul (1,0) şi având centrul situat pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

5. Fie M un punct pe parabola $y^2 = 2px$, al cărei focar este F. Dacă P este proiecţia lui M pe directoare, să se arate că tangenta în M la parabolă este perpendiculară pe mijlocul segmentului PF.

(10 Octomvrie, orele 4—7).

ALGEBRĂ

I.

Să se determine k astfel ca ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ k & k^2 & x \end{vmatrix} = 0,$$

să admită două rădăcini egale şi de semne contrare.

II.

Să se rezolve inegalitatea

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 15x + 54} < 0.$$

III.

Dându-se ecuaţia

$$x^2 - ax + b = 0$$

cu rădăcinele x_1 şi x_2, se cere să se formeze o altă ecuaţie de gradul al 2-lea cu rădăcinele y_1 şi y_2 astfel ca să avem

$$\begin{cases} y_1 = 1 + \dfrac{1}{1 + x_1^2} \\ y_2 = 1 + \dfrac{1}{1 + x_2^2}. \end{cases}$$

IV.

Să se stabilească care este derivata funcţiei

$$y = \operatorname{arc\,cotg} x.$$

V.

Să se rezolve ecuaţia

$$x^5 + 1 = 0.$$

VI.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + x + y = 18 \\ x(y + x) = 12. \end{cases}$$

(11 Octomvrie, orele $8^1/_2$—$11^1/_2$)

TRIGONOMETRIE.

1. Să se arate că

$$\sin(2a+x) + \sin(2b+x) + \sin(2c+x) - \sin(2a+2b+2c+3x) = 4\sin(a+b+x)\sin(b+c+x)\sin(c+a+x).$$

2. Triunghiul în care

$$\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \operatorname{tg} B$$

este dreptunghiu.

3. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin x - \cos x - \operatorname{tg} x = -1.$$

4. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\operatorname{tg} x \cot y = a, \qquad \sin(x + y) = b,$$

unde a şi b sunt cantităţi cunoscute. Discuţie.

5. Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, cunoscând latura AC = ' unghiul opus B, precum şi înălţimea h ce pleacă din vârful A.

6. In orice patrulater avem relaţia

$$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

Să se caute o identitate analoagă, înlocuind în primul membru *sin* prin *cos*.

(11 Octomvrie, orele 4—7).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, No. 2, Octomvrie 1943. Din proprietăţile patrulaterelor complete, de G-l *Gh. I. Popescu*, *Maximilian Hell* şi activitatea sa la Cluj, de *Victor Marian*. O problemă de cinematică, de Cpt. *I Gh. Zamfirescu*. Concursul „Gazetei Matematice" din 1944. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Gh. Th. Gheorghiu*. Probleme de Algebră şi Analiză Matematică, ediţia II-a.

Este un volum litografiat de 394 pagini, care cuprinde 590 probleme selecţionate cu îngrijire şi pricepere, precum şi soluţiile lor. Cartea este de mare folos studenţilor de la Politehnice, Universităţi şi elevilor de la Şcolile speciale militare, cărora le-o recomandăm călduros.

Preţul, 1000 lei şi cererea se poate adresa autorului, profesor la Politehnica din Timişoara.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1912 — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(sp\,x + \sin x)^2 + (cp\,x + \cos x)^2 = 3.$$

CPT. C COSTACHESCU

Soluţie. Vom folosi formulele din tabloul (11) „*Trigonometria patratică*", p. 11, presupunând pe rând arcul x în cadranul I, II, III, IV.

1°. *Cazul* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

În acest caz, ecuaţia dată se poate scri,

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \sin x\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \cos x\right)^2 = 3$$

sau

$$\left(\frac{1}{\sin x + \cos x} + 1\right)^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3.$$

De aci deducem

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

Inversând şi ridicând la patrat, avem

$$1 + \sin 2x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

de unde

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi trecând la arce, găsim

$$x = 30^\circ.$$

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$.

În acest caz, ecuaţia dată o putem scri

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} + \sin x\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{\sin x - \cos x} + \cos x\right)^2 = 3,$$

sau procedând ca mai sus, găsim

$$1 - \sin 2x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2},$$

deci

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi alegând în membrul al 2-lea semnul convenabil, adică minus, găsim

$$x = 120^\circ.$$

3°. *Cazul* $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

În acest caz, putem scri ecuaţia dată astfel

$$\left(\frac{-\sin x}{\sin x + \cos x} + \sin x\right)^2 + \left(\frac{-\cos x}{\sin x + \cos x} + \cos x\right)^2 = 3,$$

sau

$$\frac{-1}{\sin x + \cos x} + 1 = \sqrt{3},$$

$$1 + \sin 2x = \frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

deci

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De aci, alegând arcul convenabil, deducem

$$x = 210^\circ.$$

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.

În acest caz, ecuaţia dată devine

$$\left(\frac{-\sin x}{\sin x - \cos x} + \sin x\right)^2 + \left(\frac{-\cos x}{\sin x - \cos x} + \cos x\right)^2 = 3,$$

sau

$$\frac{-1}{\sin x - \cos x} + 1 = \pm\sqrt{3}.$$

Trecând 1 în membrul al 2-lea, inversând şi ridicând la patrat, deducem

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi alegând semnul convenabil, adică minus, găsim

$$x = 300^\circ.$$

Observare. Fiecărei soluții găsite, î-i putem adaoga un multiplu de 2π

Soluții date de d-nii: *Enăchescu Ion* (lic. Milit, Timișoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Schapira Salo* (Piatra-Neamț) și *Vasiliu D-tru* (lic. Milit., Timișoara).

Problema 1914. — *Să se arate că expresia*

$$E = 16^{2n+1} \times 3^{8n+4} + 7^{6n+3} \times 125^{2n+1}$$

este divizibilă prin 44171.

IONEL I. STAMATE

Soluție. Expresia E se poate scri succesiv

$$E = 2^{4(2n+1)} \times 3^{4(2n+1)} + 7^{3(2n+1)} \times 5^{3(2n+1)} =$$

$$6^{4(2n+1)} + 35^{3(2n+1)} = 1296^{2n+1} + 42875^{2n+1}.$$

Expresia E fiind de forma $A^{2n+1} + B^{2n+1}$, se observă că această expresie se divide prin $A + B$, care în cazul nostru face

$$1296 + 42775 = 44171.$$

Prin urmare E se divide prin 44171.

Soluții date de d-ra *Mang Ileana* (studentă, Timișoara), *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Boerescu P. G* (Lt, Constanța), *Luca I Ioan* (Polit, Timișoara), *Manolache C. Mircea* (lic Internat, Iași), *Popescu I. Adrian* (Polit, Timișoara), *Tărălungă Savel* (lic. Internat, Iași), *Vasiliu Gh. D-tru* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1924 — *Să se rezolve sistemul*

$$\sqrt{3\sum x^{-1} - 2} = \sqrt{\sum (xy)^{-1} - 1} = \sqrt{(xyz)^{-1} + 1} = 5.$$

IOAN N. GLIGOR

Soluție. Ridicând la patrat aceste relații, avem

$$3\sum x^{-1} - 2 = \sum (xy)^{-1} - 1 = (xyz)^{-1} + 1 = 25,$$

sau

$$\begin{cases} \sum \frac{1}{x} = 9 \\ \sum \frac{1}{xy} = 26 \\ \frac{1}{xyz} = 24. \end{cases}$$

Avem astfel cunoscut, suma, suma produselor câte două, precum și produsul numerelor $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, deci rezultă din teoria ecuațiilor că aceste numere sunt rădăcinele ecuației

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0.$$

Cum primul membru se anulează pentru $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, rezultă că avem

$$\frac{1}{x} = 2, \quad \frac{1}{y} = 3, \quad \frac{1}{z} = 4,$$

de unde

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{4}.$$

Permutând circular aceste valori, mai găsim încă cinci sisteme de soluții pentru sistemul dat.

Soluțiile sistemului dat sunt astfel

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Soluții bune date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Deheleanu Gheorghe* (Polit., Timișoara), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timișoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timișoara), *Manolache C. Mircea* (lic. Internat, Iași), *Mihalcu I. Ilie* (lic. Milit., Timișoara), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timișoara), *Preda I. D-tru* (lic. Slatina), *Șipoș Eugen* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1933. — *Fie*

$$A = \cos 2a + i \sin 2a, \qquad B = \cos 2b + i \sin 2b$$

$$C = \cos 2c + i \sin 2c, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Să se arate că avem

$$(1) \qquad \sum \frac{(A+B)(B+C)}{(A-B)(B-C)} = -1.$$

Să se deducă de aci că aceiași relație există și între A_1, B_1, C_1, *dacă*

$$A_1 = \cos 2a - i \sin 2a, \qquad B_1 = \cos 2b - i \sin 2b$$

$$C_1 = \cos 2c - i \sin 2c, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

C. BAKONYI

Soluție. Relația (1) este adevărată *oricare* ar fi formele mărimilor A, B, C. In adevăr avem

$$\sum \frac{(A+B)(B+C)}{(A-B)(B-C)} =$$

$$\frac{(A+B)(B+C)(C-A)+(B+C)(C+A)(A-B)+(C+A)(A+B)(B-C)}{(A-B)(B-C)(C-A)}$$

$$=\frac{AC^2-AB^2+B^2C+A^2B-BC^2-A^2C}{(A-B)(B-C)(C-A)}$$

$$=\frac{(A-B)(B-C)(A-C)}{(A-B)(B-C)(C-A)}=-1.$$

Deci formele particulare care sau dat lui A, B, C nu fac de cât să complice enunţul.

Notă. 1°. Au dat bune soluţii, dnii: *Deheleanu Gheorghe* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Sipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), şi *Ţarălungă Savel* (lic. Internat, Iaşi).

2°. D-l *J. Mahrenholz* a demonstrat problema observând că

$$A=e^{2ia},\qquad B=e^{2ib},\qquad C=e^{2ic}.$$

3°. Au înlocuit în Σ pe A, B, C prin valorile lor, inutil complicate în enunţ, d-nii *Boleanţu L.* (Timişoara), *Gligor N. I.* (Aliuş) şi *Manolache C. M.* (Lic. Internat, Iaşi).

G-L GH. BUICLIU

PROBLEME PROPUSE

2178. — Să se găsească numărul întreg n astfel în cât două din numerele n şi $2n\pm1$ să fie patrate perfecte.

G-L GH. BUICLIU

2179. — Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-4x^2\sqrt{x}(1+x)+x^2(6x-4)-5x(1-\sqrt{x})+4-0.$$

ALEXANDRU ŢIGANOIU.

2180. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2\sqrt{7x}+\dfrac{\sqrt{x^3y}}{y}+\dfrac{7\sqrt{xy}}{x}-\dfrac{25\sqrt{xy}}{xy}=0 \\ \dfrac{x^2}{5-\sqrt{7y}}+\sqrt{7y}-2y=\dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

HERMANN KNOPP

2181. — Să se demonstreze că, dacă x_1 şi x_2 sunt numere întregi şi mai mari decât 1 şi dacă x_1 este mai mare ca x_2, avem

$$x_1+\frac{x_2}{x_1}>x_2+\frac{x_1}{x_2}.$$

LT. GEORGE P. BOERESCU

2182. — Se dă patrulaterul A B C D, având unghiurile B şi D drepte. Să se arate că: 1°. Diferenţa patratelor diagonalelor, este egală de 4 ori patratul segmentului ce uneşte mijloacele acestor diagonale. 2°. Suma patratelor laturilor opuse, este egală cu patratul sumei diagonalelor plus de 4 ori patratul segmentului ce uneşte mijloacele acestor diagonale.

MIHAIL ST. BOTEZ

2183. — Fie punctele A_1, A_2, A_3, A_4 situate pe o dreaptă D, aşezate în ordinea indicilor. Se duce apoi o perpendiculară pe dreapta D, în mijlocul A_3 a segmentului A_1A_3, pe care se ia un punct varibil M. Din A_2 se duce o perpendiculară A_2X pe A_4M.

1°. Să se afle locul punctelor de intersecţie al dreptelor A_1M şi A_2X.

2°. Să se afle locul punctelor de intersecţie a dreptelor A_3M şi A_2X.

N. GAIU

2184. — Intr'un trunchiu de prismă triunghiulară de baze A B C, A' B' C', planele B C A' C A B', A B C' sunt concurente într'un punct D şi paralela la muchile A A', B B', C C' dusă prin D, întâlneşte bazele A B C, A' B' C' în D', D".

Să se demonstreze că D" D = 2 D D'.

V. THÉBAULT

2185. — Intr'un triunghiu oarecare A B C, avem relaţiile

$$m_c^2\sin 2\gamma=ab\sin(A-B)$$

$$c^2=4\left[m_c^2\cos 2\gamma+ab\cos(A-B)\right],$$

unde m_c este mediana C C', iar $\gamma=\sphericalangle A C' C$, restul notaţiilor fiind obicinuit

V. ALACI

ERATĂ.

Al 2-lea termen al ecuaţiei din problema 2148 este $-4x^5$.

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţii reuşiţi la al 2-lea examen de admitere (9— 11 Oct. 1943) în ordinea clasificaţiei

1. **Munteanu G. Nicolae,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
2. **Niculescu Al. Radu,** Lic. Traian, Turnu Severin.
3. **Geonea A. Corneliu,** Lic. Traian, Turnu Severin.
4. **Ionescu G. Ioan,** Lic. Traian, Turnu Severin.
5. **Stoica A. Aurel,** Lic. Timotei Cipariu, Dumbrăveni.
6. **Dumitrescu E. Dinu,** Lic. M. Eminescu Bucureşti.
7. **Ştefanitiz G. Panaghioti,** Lic. N. Bălcescu, Brăila.
8. **Galu E. Dimitrie,** Lic. C. D. Loga, Timişoara
9. **Chioibaşiu I. Ioan,** Lic. C. D. Loga Timişoara.
10. **Ciomu D. Mihai,** Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
11. **Capanu Fl. Florea,** Lic. Sf. Haralambie, T. Măgurele.
12. **Alexandrescu I. Florian,** Lic. Sft. Petru şi Pavel, Ploeşti.
13. **Szabo V. Iuliu,** Lic. A. Şaguna, Braşov.
14. **Buescu Şt. Radu Ştefan,** Lic. M. Basarab, Bucureşti
15. **Lungu I. Constantin,** Lic. V. Alexandri, Galaţi.
16. **Mărgărit F. Vasile,** Lic. N. Bălcescu, Brăila.
17. **Catan V. Dumitru,** Lic Mil. D. A. Sturdza, Craiova.
18. **Drosescu G. Paul,** Lic. Petru şi Pavel, Ploeşti.
19. **Radoslav I. Tiberiu,** Lic. C. Brediceanu, Lugoj.
20. **Aldea N. Gheorghe,** Lic. Barbu-Ştirbey, Câmpina.
21. **Bancea P. Valeriu,** Lic. Moise Nicoară, Arad.
22. **Mihăescu A. Titu,** Lic. Enăchiţa Văcărescu. Târgovişte.
23. **Munteanu L. Luc. Gh.,** Lic. M. Viteazul, Alba-Iulia.
24. **Sion Al. Mihai,** Lic. C. Brediceanu, Lugoj.
25. **Popescu T. Constantin Ilie,** Lic. Col. Naţ. Sf. Sava, Bucureşti.
26. **Tăraboi I. Vasile Vladimir,** Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti.
27. **Hering G. Gheorghe,** Lic. Moise Nicoară, Arad.
28. **Ittu G. Gheorghe,** Lic. Băeţi, Petroşani.
29. **Stoica V. Emil Ioan,** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
30. **Vioreanu D. Constantin,** Lic. Radu Greceanu, Slatina.
31. **Anghel M. Gheorghe,** Lic. Titu Maiorescu, Bucureşti.
32. **Balint I. Horaţiu Mircea,** Lic. Reg. Ferdinand, Turda.
33. **Drosescu G. Gheorghe,** Lic. Petru şi Pavel, Ploeşti.
34. **Dumitrache I. Ştefan,** Lic. Vasile Alexandri, Galaţi.
35. **Forminte S. Traian,** Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
36. **Iohanna A. Nicolae,** Lic. German, Bucureşti.
37. **Miliţescu M. Mihail,** Lic. C. Brediceanu, Lugoj.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Chirdivarencu I., (2155, 2156, 2157, 2159); **Chiriac C-tin,** (1833, 1842, 1854, 1874, 1890, 1903, 1914, 1933, 1934, 1937, 1956, 1965, 2009, 2109, 2121, 2123, 2129, 2130, 2145, 2155, 2161, 2162, 2164); **Cicirean Gh.,** (2023, 2115, 2157, 2164); **Constantinescu N. Ilie,** (P; 2023, 2052, 2098, 2114, 2117, 2125, 2131, 1134, 2138, 2139, 2154, 2157, 2161, 2162, 2164); **Cotariu D. Marcel,** (P; 2116, 2120, 2121, 2149, 2150, 2151, 2155, 2157, 2161, 2164); **Cristache G. Avram,** (2123, 2124, 2130, 2151, 2161, 2162, 2164); **Făsie V.,** (P); **Gaiu N.,** (P); **Giurcuniu Gh. Mihail,** (2018, 2154, 2155); **Glescan D. Ion,** (2162, 2163); **Godea P. Ioan,** (1679, 1863, 1898, 1913, 1914, 1933, 1934, 1971, 2034, 2114, 2116, 2120, 2122, 2145, 2154, 2155, 2156, 2161, 2162, 2164, 2170, 2175); **Ionescu V. Victor,** (2020, 2148, 2149, 2150, 2161, 2164); **Iosifescu Cicerone** (P; 2059, 2071, 2082, 2085, 2086); **Lupescu Adrian,** (2164); **Mahrenholz Iohannes,** (N; 2130, 2131, 2132, 2137, 2156, 2160); **Măties, N. I.,** (A; P.); **Muşta Ştefan,** (N.); **Neumann Maria** (A.); **Păläceanu D. Vasile,** (N; P; 2031, 2033, 2044, 2048, 2056, 2070, 2074, 2078, 2098, 2112, 2115, 2116, 2121, 2131, 2132, 2134, 2136, 2138, 2139, 2144, 2145, 2146, 2154, 2155, 2156, 2157, 2161); **Pat I. Moise,** (P.); **Popescu I. Barbu,** (2057, 2097, 2120, 2161 2162, 2164, 2170); **Popescu Gh. Ion,** (2162, 2164); **Ştefănescu Marin,** (2124, 2166, 2168); **Tincu C-tin,** (2023, 2057, 2060, 2091, 2097, 2145, 2157, 2162, 2164, 2170); **Ţigănoiu Alexandru,** (P; 2018, 2023, 2025, 2028, 2059, 2071, 2083, 2084, 2086, 2087, 2088, 2106, 2107, 2110, 2115, 2120, 2123, 2130, 2134, 2135, 2139, 2145, 2148, 2151, 2155, 2156, 2162, 2164, 2170, 2175, 2176); **Vrânceanu Gh. Gh.,** (2146, 2154, 2155, 2162, 2163, 2164, 2170); **Wegener Eugen,** (P; 1414, 1438, 1697, 1846, 1893, 2162, 2164).

77

ANUL XXIII. DECEMVRIE 1943 No. 10.

CTO R104 1-10

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.

PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU:** RATIONAMENTUL ARITMETIC.
2. **R. BOUAVAIST:** SUR CERTAINES QUADRIQUES DE RÉVOLUTION INSCRITES DANS UN TÉTRAEDRE.
3. **M. GHERMANESCU:** ECUATIA $x^2+y^2=az^n$ IN INTREGI.
4. NOTE MATEMATICE 25, 26.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1863, 1890, 1911, 1913, 1928, 1947.
7. PROBLEME PROPUSE: 2186–2193.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 – 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

„Revista Matematică Timişoara", aduce vii mulţumiri D-lui Profesor *I. V. Matieş* de la liceul din Blaj pentru suma donată, două mii lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 300 lei fiecare.

ANUL XXIII — No. 10 TIMISOARA, DECEMVRIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

RAȚIONAMENTUL ARITMETIC

DE

D. POMPEIU

1. Acum doi ani, sub titlul „raționamentul aritmetic", am ținut, la Facultatea de Științe din București, câteva prelegeri în care am căutat să arăt: importanța, pentru completarea educației matematice a tineretului (absorbit, mai ales în universitate, de metodele Analizei), a raționamentului specific aritmetic; — și, în același timp, insuficiența acelor cercetări aritmetice care, prin transformări de simple expresii algebrice (în care literele reprezintă numere *reale* orcare) încearcă uneori să obțină propoziții de caracter pur aritmetic.[1]

Rezultate de caracter pur aritmetic nu se pot obține de cât introducând în raționament proprietăți particulare ale numerelor întregi.

2. Poate că cititorii acestei reviste nu vor găsi de prisos dacă, pentru a ilustra acest adevăr, atrăgând din nou atenția asupra raționamentului aritmetic, vom lăsa să urmeze, aci, un exemplu extrem de simplu.

Să ne propunem a demonstra propoziția următoare:

Expresia

$$5n+3$$

în care n este un număr întreg, nu poate fi un patrat.

O primă demonstrație, aritmetică se'nțelege și corectă:

Orice număr întreg este numaidecât de una din formele

$$x_0 = 5n$$
$$x_1 = 5n+1$$
$$x_2 = 5n+2$$
$$x_3 = 5n+3$$
$$x_4 = 5n+4$$

în care n parcurge seria de valori: $0, 1, 2, 3, \ldots$

Dacă acum facem patratul fiecăreia din expresiile de mai sus, găsim că: orice patrat a unui număr întreg intră numaidecât în unul din aceste trei tipuri

$$5m$$
$$5m+1$$
$$5m+4$$

Prin urmare nu există patrat de forma

$$5m+3,$$

ceia ce era de arătat.

3. Dar, iată și o altă demonstrație de un caracter și mai aritmetic, dacă ne putem exprima astfel.

Să scriem

$$5x+3=y^2$$

relație în care x și y trebuie să fie numere întregi.

Să înmulțim în amândoi membrii cu 2: obținem

$$10x+6=2y^2 \qquad (1)$$

Membrul întâiu al acestei relații se interpretează astfel: e un număr ce se termină (ca unități) cu cifra 6.

Aceasta observat, să trecem la membrul al doilea al relației (1) în care avem îndoitul patratului y^2.

Dar, noi știm, verificând, că cifra unităților la un patrat nu poate fi de cât una din următoarele cifre

$$0, 1, 4, 9, 6, 5$$

Dacă acum înmulțim cu 2 (și reținem mereu cifra unităților) găsim că numărul întreg $2y^2$ nu poate fi terminat decât cu

$$0, 2, \text{ sau } 8$$

prin urmare nici într'un caz cu 6.

Avem astfel, din nou, demonstrată propoziția noastră,

4. Terminând vom observa că artificiul aritmetic, care ne-a servit aci într'o chestiune extrem de simplă, e foarte folositor în chestiuni aritmetice de deosebită importanță.

[1]) Introducerea, de către *Hermite*, a variabilei *continue* în cercetările aritmetice — e o metodă cu exigențe speciale.

SUR CERTAINES QUADRIQUES DE RÉVOLUTION INSCRITES DANS UN TÉTRAÈDRE.

PAR

M-r. R. BOUVAIST.

Notations. Le tétraèdre a pour sommets A, B, C, D; on pose $BC=a$, $DA=a'$, $CA=b$, $DB=b'$, $AB=c$, $DC=c'$, enfin on désigne par (a), (b), (c), (a'), (b'), (c') les dièdres d'arêtes a, b, c, a', b', c'.

Quadriques de révolution considérées.

Si A′, B′, C′, D′ sont leurs contact avec les faces BCD, CDA, DAB, ABC, les droites AA′, BB′, CC′, DD′ sont concourantes.

Theorème. *Si les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *sont concourantes et si* F *est un foyer de la quadrique de révolution considérée:*

1°. *Le tétraèdre podaire* $F_1F_2F_3F_4$ *de* F *par rapport à* ABCD *est isodynamique, c'est-à-dire que l'on a* $F_1F_2.F_3F_4=F_2F_3.F_4F_1=F_2F_4.F_1F_3$.

2°. *Les produits des aires des triangles ayant pour sommet commun* F *et pour bases deux arêtes opposées de* ABCD *sont égaux.*

3°. *Les produits des sinus des angles sous lesquels on voit de* F *deux arêtes opposées de* ABCD *sont égaux.*

En effet si ABCD est en coordonnées normales le tétraèdre de réference, si les foyers F et F′ de la quadrique de révolution ont pour coordonnées $x_1\,y_1\,z_1\,t_1$, $x_2\,y_2\,z_2\,t_2$, l'équation tangentielle de cette quadrique est

$$k^2[l^2+m^2+n^2+p^2-2mn\cos(a')-2nl\cos(b')-2lm\cos(c')-2lp\cos(a)-2mp\cos(b)-2np\cos(c)]-[lx_1+my_1+nz_1+pt_1][lx_2+my_2+nz_2+pt_2]=0,$$

avec les relations

$$k^2=x_1x_3=y_1y_2=z_1z_2=t_1t_2$$

si l'on pose

$$P=x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos(c') \qquad P'=z_1^2+t_1^2+2z_1t_1\cos(c)$$

$$Q=x_1^2+z_1^2+2y_1z_1\cos(b') \qquad Q'=y_1^2+t_1^2+2y_1t_1\cos(b)$$

$$R=x_1^2+t_1^2+2x_1t_1\cos(a) \qquad R'=y_1^2+z_1^2+2y_1z_1\cos(a')$$

on aura

$$P=\overline{F_1F_1}^2=\delta_{CD}^2\sin^2(c') \qquad P'=\overline{F_3F_4}^2=\sin^2(c)\,\delta_{AB}^2$$

$$Q=\overline{F_1F_3}^2=\delta_{BO}^2\sin^2(b') \qquad Q'=\overline{F_2F_4}^2=\sin^2(b)\,\delta_{AC}^2$$

$$R=\overline{F_1F_2}^2=\delta_{BC}^2\sin^2(a) \qquad R'=\overline{F_2F_3}^2=\sin^2(a')\,\delta_{AD}^2$$

δ_{CD}, δ_{AB}, δ_{BD}, δ_{AC}, δ_{BC}, δ_{AD}

désignant les distances de F aux arêtes CD, AB, BD, AC, BC AD et l'équation de la quadrique s'écrit

$$lmz_1t_1P+lny_1t_1R+lpy_1z_1R+mnx_1t_1R'+mpx_1z_1Q'+npx_1y_1P'=0=\varphi(l\ m,n,p).$$

Les coordonnées de A′ sont

$$\frac{x}{\varphi'_l(l,0,0,0)}=\frac{y}{\varphi'_m(l,0,0,0)}=\frac{z}{\varphi'_n(l,0,0,0)}=\frac{t}{\varphi'_p(l,0,0,0)}$$

ou

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{P}=\frac{z}{Q}=\frac{t}{R}$$

celles de B′, C′, D′ sont de même

$$\frac{x}{P}=\frac{y}{0}=\frac{z}{R'}=\frac{t}{Q'}$$

$$\frac{x}{Q}=\frac{y}{R'}=\frac{z}{0}=\frac{t}{P'}$$

$$\frac{x}{R}=\frac{y}{Q'}=\frac{z}{P'}=\frac{t}{0}$$

AA′, BB′, CC′, DD′ sont concourantes si

$$PP'=QQ'=RR'$$

d'où

$$F_1F_2.F_3F_4=F_1F_3.F_2F_4=F_1F_4.F_2F_3.$$

2°. On a encore

$$\sin(c)\sin(c')\,\delta_{CD}\,\delta_{AB}=\sin(a)\sin(a')\,\delta_{BC}\,\delta_{AD}=\sin(b)\sin(b')\,\delta_{BD}\,\delta_{AC}$$

or

$$\sin(a)\sin(a')=aa'\cdot\frac{9r^2}{4ABCD}$$

d'où

$$aa'\,\delta_{AD}.\,\delta_{BC}=bb'\,\delta_{BD}\,\delta_{AC}=cc'\,\delta_{CD}.\,\delta_{AB}$$

ou

$$(FBC)(FAD)=(FCD)(FAB)=(FBD)(FAC).$$

3°.
$$(FBC)=\frac{FB.FC}{2}\sin\widehat{BFC}$$

$$(FAD) = \frac{FA \cdot FD}{2} \sin AFD$$

d'où

$$\sin CFB \cdot \sin DFA = \sin CFD \cdot \sin AFB = \sin CFA \cdot \sin BFD.$$

N. B. Dans son *Mémoire sur la tétraèdre*, (1884), *J. Neuberg* a donné les deux premières parties de ce théorème dans le cas particuler des sphéres inscrites ou exinscrites au tétraèdre A B C D.

ECUAŢIA $x^2+y^2=az^n$ ÎN ÎNTREGI.

DE

M. GHERMĂNESCU.

În coloanele acestei Reviste şi în altele streine, s'au examinat nenumărate cazuri particulare ale ecuaţiei

(1) $$x^2+y^2=az^n,$$

unde a şi n sunt întregi pozitivi daţi. Cum nu totdeauna s'a dat la cazul studiat soluţia generală, voi face aceasta pentru ecuaţia (1)

Pentru aceasta, observ că, deoarece primul membru al ecuaţiei (1) este o sumă de două patrate perfecte, va fi la fel cu orice divizor al său, deci şi cu a şi z (*Fermat*, apoi *Lagrange*, Oeuvres, I, 3, p. 708), deci a trebue să fie o sumă de două patrate, $a=\alpha^2+\beta^2$, pentru ca ecuaţia (1) să aibă soluţii întregi.

Această condiţie *necesară*, este şi *suficientă* căci, având şi $z=\lambda^2+\mu^2$, az^n se poate descompune într'o sumă de două patrate. Vom descompune în primul rând pe z^n. Avem

$$z^n=(\lambda^2+\mu^2)^n=(\lambda+i\mu)^n(\lambda-i\mu)^n=(A+iB)(A-iB)=A^2+B^2,$$

unde

$$A+iB=(\lambda+i\mu)^{n-k}(\lambda-i\mu)^k=(\lambda^2+\mu^2)^k(\lambda+i\mu)^{n-2k}$$

$$A-iB=(\lambda+i\mu)^k(\lambda-i\mu)^{n-k}=(\lambda^2+\mu^2)^k(\lambda-i\mu)^{n-2k}$$

din care deducem

(2) $$A=(\lambda^2+\mu^2)^k(\lambda^{n-2k}-C^2_{n-2k}\lambda^{n-2k-2}\mu^2+C^4_{n-2k}\lambda^{n-2k-4}\mu^4-\ldots),$$

$$B=(\lambda^2+\mu^2)^k(C^1_{n-2k}\lambda^{n-2k-1}\mu-C^3_{n-2k}\lambda^{n-2k-3}\mu^3+\cdots),$$

$$k=0,1,2,\ldots r,$$

r fiind $\frac{n-2}{2}$ sau $\frac{n-1}{2}$, după cum n este par sau impar.

Odată obţinută egalitatea $z^n=A^2+B^2$, avem

$$x^2+y^2=az^n=(\alpha^2+\beta^2)(A^2+B^2)=(\alpha A\pm\beta B)^2+(\alpha B\mp\beta A)^2,$$

aşa că *soluţia generală a ecuaţiei* (1) *este dată de relaţiile.*

(3) $$x=\alpha A\pm\beta B,\quad y=\alpha B\mp\beta A,\quad z=\lambda^2+\mu^2,$$

unde λ *şi* μ *sunt întregi arbitrari, iar* A *şi* B *sunt daţi de* (2).

Dacă numărul dat a se descompune în p moduri într'o sumă de două patrate, de oarece pentru A şi B obţinem $r+1$ sisteme de valori, date de (2), rezultă că (3) cuprinde $2p(r+1)$ sisteme de soluţii pentru x, y, z, care au acelaş z.

Excepţie face cazul $a=2^{2m+1}$, care dă $\alpha=\beta=2^m$, iar (3) devin

(4) $$x=2^m(A+B),\quad y=2^m(A-B),\quad z=\lambda^2+\mu^2,$$

deci numai $(r+1)$ sisteme de soluţii

Aplicaţii. — 1°. Ecuaţia

$$x^2+y^2=z^n$$

a fost rezolvată de *L. J. Mordell* (v. *Le dernier théorème de Fermat* par *R. Noguès*, Les Presses Universitaires de France, 1929), care dă soluţia corespunzătoare lui $k=0$ în (2) drept soluţie generală, ceia ce este evident inexact. Soluţiile acestei ecuaţii sunt date de următoarele $r+1$ relaţii

$$x=A,\quad y=B,\quad z=\lambda^2+\mu^2,$$

A şi B fiind date de (2).

2°. — Ecuaţia

$$x^2+y^2=2z^n$$

a fost rezolvată parţial de D. *A. Gloden* (R.M.T. v. XIX, p. 121) pentru $n=2m$. Observând că $2=1^2+1^2$, deci $\alpha=\beta=1$, soluţia generală a acestei ecuaţii este dată de (4) unde facem $m=0$.

3°. — Ecuaţia

$$x^2+y^2=a\cdot 10^n$$

a fost rezolvată parțial de D. *Gh. Constantinescu* (R. M. T. V. XVI, p. 101—103). Aci z este dat, $z = 3^2 + 1^2$, adică $\lambda = 3$, $\mu = 1$. Soluția generală a ecuației precedente va fi dată de formulele (3), în care facem $\lambda = 3$, $\mu = 1$, dacă $a = \alpha^2 + \beta^2$.

Astfel, pentru ecuația

$$x^2 + y^2 = 13 \cdot 10^5,$$

avem $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, iar formulele (2) dau

A=12, B=316; A=180, B=260; A=300, B =100,

cu soluțiile

$$x = 668, y = 924; \quad x = 596, y = 972;$$

$$x = 1060, y = 420; \quad x = 20, y = 1140;$$

$$x = 1100, y = 300; \quad x = 700, y = 900.$$

4°. — Ecuația

$$x^2 + y^2 = 65\, z^5.$$

Avem

$$65 = 5 \times 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2$$

deci soluția generală a ecuației precedente este dată de

$$x = 8\,A \pm B, \quad y = 8\,B \mp A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

și

$$x = 4\,A \pm 7\,B, \quad y = 4\,B \mp 7\,A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

A și B fiind dați de (2), unde $n = 5$, $k = 0, 1, 2$.

5°. — Ecuația

$$x^2 + y^2 = 26\, z^6.$$

Avem $26 = 1^2 + 5^2$, deci soluția generală a ecuației precedente este dată de

$$x = A \pm 5\,B, \quad y = B \mp 5\,A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

A și B fiind dați de (2), unde $n = 6$, $k = 0, 1, 2$.

6°. — Ecuația

$$x^2 + y^2 = 2465\, z^n.$$

Avem $2465 = 5 \times 17 \times 29$, sau

$$2455 = (1^2 + 2^2)(1^2 + 4^2)(2^2 + 5^2) =$$

$$34^2 + 41^2 = 22^2 + 47^2 = 44^2 + 23^2 = 8^2 + 49^2,$$

astfel că soluția generală a ecuației precedente este dată de

$$x = 34\,A \pm 41\,B, \quad y = 34\,B \mp 41\,A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

$$x = 22\,A \pm 47\,B, \quad y = 22\,B \mp 47\,A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

$$x = 44\,A \pm 23\,B, \quad y = 44\,B \mp 23\,A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

$$x = 8\,A \pm 49\,B, \quad y = 8\,B \mp 49\,A, \quad z = \lambda^2 + \mu^2,$$

A și B fiind dați de (2).

NOTE MATEMATICE

25. — *Formules de résolution pour l'égalité multiple*

$$a_1, a_2, a_3 \overset{x}{=} b_1, b_2, b_3 \quad (x = 2, 3).$$

Rappelons que nous représentons par la notation

$$a_1, a_2, a_3, \overset{x}{=} b_1, b_2, b_3 \quad (x = 2, 3)$$

le système diophantien

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3. \end{cases}$$

Nous avons établi pour ce système les 4 groupes suivants de formules:

A) $a_1 = 6u^2 + 24uv + 3v^2 \mid b_1 = 6u^2 - 24uv + 3v^2$
$a_2 = 2u^2 - 24uv + 3v^2 \mid b_2 = 2u^2 + 24uv + 3v^2$
$a_3 = 8u^2 - 12uv \mid b_3 = 8u^2 + 12uv$

B) $a_1 = 9u^2 + 24uv + 2v^2 \mid b_1 = 9u^2 - 24uv + 2v^2$
$a_2 = 3u^2 - 24uv + 2v^2 \mid b_2 = 3u^2 + 24uv + 2v^2$
$a_3 = 12u^2 - 12uv \mid b_3 = 12u^2 + 12uv$

C) $a_1 = 3u^2 + 24uv + 6v^2 \mid b_1 = 3u^2 - 24uv + 6v^2$
$a_2 = 3u^2 - 24uv + 6v^2 \mid b_2 = u^2 + 24uv + 6v^2$
$a_3 = 4u^2 - 12uv \mid b_3 = 4u^2 + 12uv$

D) $a_1 = 18u^2 + 24uv + v^2 \mid b_1 = 18u^2 - 24uv + v^2$
$a_2 = 6u^2 - 24uv + v^2 \mid b_2 = 6u^2 + 24uv + v^2$
$a_3 = 24u^2 - 12uv \mid b_3 = 24u^2 + 12uv,$

u et v sont des entiers arbitraires.

Exemples numériques.

$$u = 1, \quad v = 2$$

ad A) $33, (-17), (-8) \overset{x}{=} 31, 16, (-15)$
ad B) $65, (-37), (-12) \overset{x}{=} 59, 36, (-31)$
ad C) $75, (-23), (-20) \overset{x}{=} 73, 28, (-21)$
ad D) $35, (-19), \quad \overset{x}{=} 29, 24, (-13)$

$(x=2, 3)$.

A. GLODEN

---

26. — *Suprafaţa triunghiului, cunoscând ecuaţiile laturilor.*

In „Cours de Géométrie Analytique" de *J. Carnoy* pag. 53, găsim chestiunea: Să se găsească suprafaţa triunghiului ale cărui laturi sunt date de ecuaţiile:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A y + B x + C &= 0 \quad (D_1)\\ A' y + B' x + C' &= 0 \quad (D_2)\\ A'' y + B'' x + C'' &= 0 \quad (D_3). \end{aligned}$$

Se spune apoi că rezolvând ecuaţiile două câte două, pentru a găsi coordonatele vârfurilor şi înlocuind în formula cunoscută,

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

obţinem interesanta relaţie:

$$(2)\qquad 2S = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A & B\\ A' & B' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A' & B'\\ A'' & B'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A'' & B''\\ A & B \end{vmatrix}}.$$

In cele ce urmează îmi propun să dau o altă soluţie acestei probleme.

Dreptele (1), formând un triunghiu, trebue ca:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero, în caz contrar ele sunt concurente; tot aşa şi minorii coloanei a treia sunt diferiţi de zero, căci altfel am avea drepte paralele.

Fie (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) coordonatele vârfurilor obţinute la intersecţiile laturilor (D_1, D_2); (D_2, D_3) şi (D_1, D_3).

Se ştie că valoarea unui determinant nu se schimbă, dacă la elementele unei coloane adunăm celelalte înmulţite respectiv cu aceleaşi cantităţi.

Deci avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & A y_1 + B x_1 + C\\ A' & B' & A' y_1 + B' x_1 + C'\\ A'' & B'' & A'' y_1 + B'' x_1 + C'' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} A & B & 0\\ A' & B' & 0\\ A'' & B'' & A'' y_1 + B'' x_1 + C'' \end{vmatrix}$$

şi prin urmare

$$(3)\qquad \Delta = (A'' y_1 + B'' x_1 + C'') \cdot \begin{vmatrix} A & B\\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Tot astfel primim şi relaţiile:

$$(4)\qquad \Delta = (A y_2 + B x_2 + C) \cdot \begin{vmatrix} A' & B'\\ A'' & B'' \end{vmatrix}.$$

$$5)\qquad \Delta = (A' y_3 + B' x_3 + C') \cdot \begin{vmatrix} A'' & B''\\ A & B \end{vmatrix}.$$

Pe de altă parte, ţinând seama de coeficientul unghiular al laturei (D_3), avem:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = -\frac{B''}{A''}$$

sau

$$\frac{y_3 - y_2}{B''} = \frac{x_3 - x_2}{-A''} = \frac{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}}{\sqrt{A''^2 + B''^2}} = \frac{\overline{D_3}}{\sqrt{A''^2 + B''^2}}$$

$\overline{D_3}$, fiind lungimea laturei (D_3).

De aici găsim:

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - \dfrac{A''.\overline{D_3}}{\sqrt{A''^2 + B''^2}}\\ y_3 = y_2 + \dfrac{B''.\overline{D_3}}{\sqrt{A''^2 + B''^2}} \end{cases}.$$

Inlocuind aceste valori în formula (5) şi observând că

$$A' y_2 + B' x_2 + C' = 0, \text{ obţinem:}$$

$$(6)\qquad \overline{D_3} = \frac{\Delta . \sqrt{A''^2 + B''^2}}{\begin{vmatrix} A' & B'\\ A'' B'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A'' B''\\ A & B \end{vmatrix}}.$$

Să scriem acum suprafața triunghiului, luând ca bază latura D_3 și ca înălțime distanța dela (x_1, y_1) la (D_3)

$$2S = \frac{\overline{D_3} \cdot (A'' y_1 + B'' x_1 + C'')}{\sqrt{A''^2 + B''^2}}$$

și ținând seama de (3) și (6) avem în fine

$$2S = \frac{\Delta^2}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A'' & B'' \\ A & B \end{vmatrix}}$$

adică formula (2).

Observare. In același fel putem obține formule analoage cu (6) și pentru $\overline{D_1}$ și $\overline{D_2}$.

STEFAN MUSTA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX N-rul 3, Noemvrie 1943. Valoarea lui π, de *Ion Ionescu*. Operațiuni cu numerele lui *Legendre*, de Comandor *I. Linteș*. Extinderea în spațiu a unei teoreme a D-lui Profesor *Pompeiu*, de *I. C. Vasiliu*. O problemă cu patrate de *I. B. Florescu*. Cilindrul anailagmatic, de *D. Barbelian*.

Raport pentru decernarea premiului „*Vasile Conta*" de Prof. *O. Onicescu* și Prof. *Al. Pantazi*.

Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Revista Științifică a liceului Intitutului Român din Sofia, Anul II, No. 3.*

Despre reacțiuni fotochimice, de Prof. *Bratu Dumitru*. Metode pentru determinarea limitelor rădăcinelor unei ecuații, de Prof. *Georgescu Vasile*. Trigonometria sferică (urmare), de *Foti Vasile*. Despre tehnica rezolvării problemelor, (urmare), de *T. G.* De la soie végétal ou artificielle, de Prof. *Bratu Dumitru*. Probleme rezolvate și propuse.

3. *M. Ghermănescu*. Asupra metodei părților proporționale. (Extras din „R. M. T.", An. XXIII, No. 7).

4. Dr. Ing. *Adrian Stambuleanu*. Studiul termodinamic al timpului admisiei la motorul termic în 4 timpi. (Extras din „Buletinul Societății Politehnice din România, Anul LVII, No. 5).

PROBLEME PROPUSE

Problema 1863. — *Să se arate că în orice triunghiu* A B C *avem relațiile:*

$$\frac{a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)}{Rr} - 4p =$$

$$\Sigma a \cos(B - C) = \frac{4pr}{R}.$$

STELIAN CETATEANU

Soluție dată de D-l A. Gloden (Luxemburg).

Vom stabili întâi că primul membru este egal cu ultimul și apoi că al doilea membru este egal cu ultimul:

1°. Din relațiile cunoscute

$$\frac{p-a}{r} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \qquad R = \frac{a}{2\sin A}, \qquad \text{deducem}$$

$$\Sigma \frac{a^2(p-a)}{Rr} = \Sigma\, 2a \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \sin A = 4\Sigma a \cos^2\frac{A}{2}.$$

Mai departe putem scri:

$$\frac{\Sigma a^2 p - a)}{Rr} - 4p = 4\Sigma a \cos^2\frac{A}{2} - 2\Sigma a =$$

$$2\Sigma a\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right) = 2\Sigma a \cos A = 2R\Sigma 2 \sin A \cos A =$$

$$2R\Sigma 2 \sin A = 8R \sin A \sin B \sin C = \frac{8R.S}{2R^2} = \frac{4S}{R} = \frac{4pr}{R},$$

unde am avut în vedere relațiile cunoscute

$$\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

(Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M.". p. 583 și p. 210).

Am stabilit astfel identitatea

$$\frac{\Sigma a^2(p-a)}{Rr} - 4p = \frac{4pr}{R}.$$

2°. Având în vedere că, $a = 2R \sin A$, putem scri succesiv

$$\Sigma a \sin(B - C) = 2R\Sigma \sin A \cos(B - C) =$$

$$R\Sigma[\sin(A + B - C) + \sin(A - B + C)] =$$

$$R\Sigma[\sin(\pi - 2C) + \sin(\pi - 2B)] = 2R\Sigma \sin 2A.$$

Dar am arătat la punctul 1° că,

$$2R\Sigma \sin 2A = \frac{4pr}{R},$$

astfel deducem

$$\Sigma a \sin(B - C) = \frac{4pr}{R}.$$

Ambele relații cerute sunt deci stabilite.

A mai dat o soluție d-nul *Aldea V. Minea* (Buzău).

Problema 1890. — *Să se găsească numerile prime al căror produs prin 195, mărite cu 1, dau patrate perfecte.*

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Conform enunţului trebuie să avem

$$N \times 195 + 1 = x^2,$$

unde N şi x sunt întregi, primi între ei.

Mai putem scri

$$(x-1)(x+1) = 3 \times 5 \times 13 \times N.$$

Toţi factorii din al 2-lea membru fiind primi, trebuie să dividă cel puţin pe unul din factorii din primul membru, astfel că avem următoarele posibilităţi de descompunere:

$x-1$	3	5	13	N	15	39	3N	65	5N
$x+1$	65N	39N	15N	195	13N	5N	65	3N	39

$x-1$	13N	15N	39N	65N	195	1	195N
$x+1$	15	13	5	3	N	195N	1

Căutând să rezolvim pe rând aceste sisteme, în numere întregi, găsim soluţii numai pentru al 3-lea, al 4-lea, al 7-lea, al 10-lea şi al 14-lea sistem, anume

x	14	194	64	14	196
N	1	193	21	1	197

Numerile prime N care satisfac enunţul, sunt numai următoarele:

1, 193 şi 197.

Soluţii date de d-nii: *Becu Crum* (Institutul Român din Sofia), *Gâţă Gheorghe* (Tg-Jiu), *Ionescu Petre* (Craiova) şi *Vasiliu D-tru* (lic. Milit., Timişoara).

Problema 1900. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$(\sqrt{x^2-2}+x)^{2n} = 2^n i^n, \quad (i = \sqrt{-1})$$

V. ALACI

Soluţie. Ridicând la patrat cantitatea din paranteză, simplificând prin 2^n, apoi extrăgând rădăcina n, obţinem,

$$x^2 + x\sqrt{x^2-2} - 1 = i\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = ie^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

sau

$$x\sqrt{x^2-2} = 1 + ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - x^2$$

Ridicând la patrat şi simplificând găsim

$$0 = 1 - e^{\frac{4ik\pi}{n}} - 2ie^{\frac{2ik\pi}{n}}x^2 + 2ie^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

De aci deducem

$$x^2 = \frac{\left(1 + ie^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2}{2ie^{\frac{2ik\pi}{n}}},$$

deci

$$(1) \quad x = \pm\frac{1 + ie^{\frac{2ik\pi}{n}}}{\sqrt{2}\, i^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{ik\pi}{n}}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Cum

$$i^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

rădăcinile (1) se mai pot scri

$$(2) \quad x = \pm\frac{1 + ie^{\frac{2ik\pi}{n}}}{(1+i)e^{\frac{ik\pi}{n}}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Cele $2n$ rădăcini ale ecuaţiei din enunţ, sunt date de (2).

Pentru $k = 0$, obţinem, de exemplu rădăcinile reale

$$x = \pm 1,$$

care verifică ecuaţia dată, observând că dacă luăm $x = -1$, să luăm semnul —, înaintea radicalului.

Au găsit numai soluţiile ± 1, d-nii *Gâţă Gheorghe* (Tg-Jiu) şi *Ionescu Petre* (Craiova).

Problema 1911. — *Să se rezolve şi să se găsească condiţia de compatibilitate a sistemului:*

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2-1)(z^2-1) = a\,x\,y\,z \\ (y^2+1)(z^2-1)(x^2-1) = b\,x\,y\,z \\ (z^2+1)(x^2-1)(y^2-1) = c\,x\,y\,z \\ (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = d\,x\,y\,z \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

Soluție. Multiplicăm primele 3 ecuații, ținem seamă de a 4-a și în urmă extragem rădăcina patrată, obținem

$$(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=\varepsilon\sqrt{\frac{abc}{d}}\,xyz,\quad(\varepsilon=\pm 1).$$

Împart această ecuație, pe rând, cu primele 3 ecuații ale sistemului, avem

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\varepsilon\sqrt{\dfrac{bc}{ad}}\\[2ex]\dfrac{y^2-1}{y^2+1}=\varepsilon\sqrt{\dfrac{ac}{bd}}\\[2ex]\dfrac{z^2-1}{z^2+1}=\varepsilon\sqrt{\dfrac{ab}{cd}}.\end{cases}$$

Aplicând fiecărei din aceste ecuații o proprietate a proporțiilor și în urmă extrăgând rădăcina patrată, găsim sistemul de soluții.

$$\begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{ad}+\varepsilon\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}-\varepsilon\sqrt{bc}}}\\[2ex]y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{bd}+\varepsilon\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}-\varepsilon\sqrt{ac}}}\\[2ex]z=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{cd}+\varepsilon\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}-\varepsilon\sqrt{ab}}}.\end{cases}$$

Să găsim acum condiția de compatibilitate a sistemului dat.

Pentru aceasta, înlocuim valorile găsite pentru x, y, z în una din ecuațiile sistemului, de exemplu în a 4-a scrisă sub forma

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=d$$

și obținem, luând $\varepsilon=1$.

$$\left[\sqrt{\frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}-\sqrt{bc}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{ad}-\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}}\right]\times$$

$$\left[\sqrt{\frac{\sqrt{bd}+\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}-\sqrt{ac}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{bd}-\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}+\sqrt{ac}}}\right]\times$$

$$\left[\sqrt{\frac{\sqrt{cd}+\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}-\sqrt{ab}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{cd}-\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}+\sqrt{ab}}}\right]=\pm d.$$

Dacă luăm $\varepsilon=-1$, găsim aceiași relație.

Relația de compatibilate se poate scri încă

$$\frac{2\sqrt{ad}}{\sqrt{ab}-\sqrt{bc}}\cdot\frac{2\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}-\sqrt{cd}}\cdot\frac{2\sqrt{cd}}{\sqrt{cd}-\sqrt{ab}}=\pm d,$$

sau

$$8d\sqrt{abcd}=\pm d\sqrt{(ad-bc)(bd-ac)(cd-ab)}.$$

Simplificând cu $d\neq 0$ și ridicând la patrat, avem condiția de compatibilitate cerută anume

$$64\,abcd=(ad-bc)(bd-ac)(cd-ab).$$

Soluții date de d-ra *Checian Ana* (studentă, Timișoara) și de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1913. — *Să se determine α astfel ca ecuațiile*

$$sp\,x+\alpha\,cp\,x-\alpha^2=0$$

$$sp\,x+2\alpha\,cp\,x+\frac{1}{9}=0,$$

să aibă o rădăcină comună în cadranul al 2-lea și în urmă să se afle rădăcinele lor.

V. ALACI

Soluție. Din *„Trigonometria patratică“* se știe că în al 2-lea cadran avem

$$cp\,x=sp\,x-1,$$

astfel că din ecuațiile date deducem respectiv

$$sp\,x=\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha+1}=\alpha,$$

$$sp\,x=\frac{2\alpha-\frac{1}{9}}{2\alpha+1}=\frac{18\alpha-1}{18\alpha+9}.$$

Pentru ca ecuațiile date să aibă o rădăcină comună în al 2-lea cadran, trebuie să avem

$$\frac{18\alpha-1}{18\alpha+9}=\alpha,$$

sau

$$18\alpha^2-9\alpha+1=0.$$

De aci deducem

$$\alpha=\frac{1}{3}\quad\text{și}\quad\alpha=\frac{1}{6}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile date, obținem următoarele ecuații

(1) $$sp\,x+\frac{1}{3}\,cp\,x-\frac{1}{9}=0$$

(2) $$sp\,x + \frac{2}{3}\,cp\,x + \frac{1}{9} = 0$$

(3) $$sp\,x + \frac{1}{6}\,cp\,x - \frac{1}{36} = 0$$

(4) $$sp\,x + \frac{1}{3}\,cp\,x + \frac{1}{9} = 0,$$

care trebuesc rezolvate.

Pentru aceasta, vom folosi rezultatele dintr'un articol[1] publicat în „R. M. T." Vol. XX, p. 131, rezumate în tabloul (T), soluționând pe rând ecuațiile de mai sus, care sunt de forma,

(5) $$sp\,x + \alpha\,cp\,x + \beta = 0.$$

1°. *Rezolvarea ecuației (1).* Dacă în ecuația generală (5), luăm

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = -\frac{1}{9},$$

obținem ecuația (1).

Observând că aceste valori satisfac inegalitățile

$$-1 < \beta < \alpha \qquad \text{și} \qquad -1 < -\beta < \alpha,$$

rezultă, conform celor cuprinse în tabloul (T), că ecuația (1) admite o rădăcină în cadranul al 2-lea și alta în cadranul al 4-lea și că aceste rădăcini, date în tabloul (T), sunt respectiv

$$sp\,x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{3} = 0{,}33333,$$

$$sp\,x = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1} = -\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{6} = -0{,}16666.$$

Căutând în tabela 1, p. 14 din „*Trig. patratică*", care dă valorile naturale ale sinusului patratic, găsim în urma unor calcule ușoare de proporționalități, că la

0, 33333 corespunde arcul 26°,33′54″;

deci arcul din al 2-lea cadran care are același sinus, este

$$x = 180^0 - 26^0, 33'\,54'' = 153^0, 26', 6''.$$

Avem astfel soluția ecuației (1) din cadranul al 2-lea

Analog găsim cu tabela 1, „*Trig, patratică*", că la

0, 16666.... corespunde arcul 11°, 18′, 34″,

deci arcul din cadranul al 4-lea care are sinusul patratic — 0, 16666, este

$$x = 360^0 - 11^0, 18'\,34'' = 348^0, 41', 26''.$$

2°. *Rezolvarea ecuației (2).* Dacă în ecuația generală (5), luăm

$$\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \beta = \frac{1}{9},$$

obținem ecuația (2). Observând că aceste valori satisfac inegalitățile

$$-1 < \beta < \alpha \qquad \text{și} \qquad -1 < -\beta < \alpha,$$

rezultă, conform celor cuprinse în tabloul (T), că ecuația (2) admite o rădăcină în cadranul al 2-lea și alta în cadranul al 4-lea și că aceste rădăcini, date în tabloul (T), sunt respectiv

$$sp\,x = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{9}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{3} = 0{,}33333,$$

$$sp\,x = -\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{9}}{\frac{2}{3} + 1} = -0{,}46666,$$

Soluția din cadranul al 2-lea a ecuației (2), este cum am mai găsit

$$x = 153^0, 26', 6''.$$

Găsim apoi cu tabela 1, din „*Trig. patratică*", că la

0, 46666... corespunde arcul 41° 11′ 5″,

astfel că arcul din cadranul al 4-lea, soluție a ecuației (2) este

$$x = 360^0 - 4^0, 11', 5'' = 318^0, 58', 55''.$$

3°. *Rezolvarea ecuației (3).* Dacă în ecuația generală (5), luăm

$$\alpha = \frac{1}{6}, \qquad \beta = -\frac{1}{36},$$

obținem ecuația (3). Observând că aceste valori satisfac inegalitățile

$$-1 < \beta < \alpha \qquad \text{și} \qquad -1 < -\beta < \alpha,$$

rezultă, conform celor cuprinse în tabloul (T), că ecuația (3) admite o rădăcină în cadranul al 2-lea

[1]) *V. Alaci.* Un nou capitol de „*Geometrie Analitică*"

şi alta în cadranul al 4-lea şi că aceste rădăcini, date în tabloul (T) sunt respectiv

$$sp\, x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{36}}{\frac{1}{6} + 1} = \frac{1}{6} = 0,16666,$$

$$sp\, x = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1} = -\frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{36}}{\frac{1}{6} + 1} = -\frac{5}{42} = -0,11904.$$

Cum în tabela 1, la

0,16666... corespunde arcul $11^0, 18', 34''$,

rezultă că soluţia din cadranul al 2-lea a ecuaţiei (3), este

$$x = 180^0 - 11^0, 18', 34'' = 168^0, 41', 26''.$$

De asemeni în tabela 1, la

0,11904... corespunde arcul $7^0, 41', 44''$,

astfel că arcul din cadranul al 4-lea soluţie a ecuaţiei (3) este

$$x = 360^0 - 7^0, 41', 44'' = 352^0, 18', 16'',$$

4°. *Rezolvarea ecuaţiei (4).* Dacă în ecuaţia generală (5), luăm

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{1}{9},$$

obţinem ecuaţia (4).

Observând că aceste valori satisfac inegalităţile

$$-1 < \beta < \alpha \quad \text{şi} \quad -1 < -\beta < \alpha,$$

rezultă, conform celor cuprinse în tabloul (T), că ecuaţia (4) admite o rădăcină în al 2-lea cadran şi alta în cadranul al 4-lea şi că aceste rădăcini, date în tabloul (T), sunt respectiv

$$sp\, x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{6} = 0,16666,$$

$$sp\, x = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1} = -\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{3} = -0,33333.$$

De aci rezultă, ca mai sus, că soluţia din cadranul al 2-lea a ecuaţiei (4), este

$$x = 168^0, 41', 26''.$$

De asemeni, rezultă ca mai sus, că soluţia din cadranul al 4-lea a ecuaţiei (4), este

$$x = 360^0 - 26^0, 33', 54'' = 333^0, 26', 6''.$$

In felul acesta, problema este complet soluţionată, observând că am putea adăoga încă soluţiilor aflate, câte un multiplu de 2π.

O soluţie foarte bună şi completă s-a primit de la d-l *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), arcele însă le-a calculat cu ajutorul logaritmilor. O altă soluţie mai puţin completă a fost primită de la d-l *Wegener Eugen,* (Bucureşti).

Problema 1928. — *Să se stabilească identitatea:*

$$2 \times 5^n \sin 2n\varphi = [(2 - i)^{2n} - (2 + i)^{2n}]\, i,$$

unde,

$$\varphi = \operatorname{arc\,cotg} 2, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Să se verifice pentru $n = 2$ *şi* $n = 3$.

V. ALACI

Soluţie. Din relaţia $\varphi = \operatorname{arc\,cotg} \varphi$, deducem

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = 2. \tag{1}$$

Scăzând şi adunând $i\,(i = \sqrt{-1})$ în ambii membrii, avem

$$\frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\sin \varphi} = 2 - i$$

$$\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\sin \varphi} = 2 + i.$$

Ridicând la puterea $2n$ aceste relaţii şi ţinând seamă de regula lui *Moivre*, obţinem

$$\frac{\cos 2n\varphi - i \sin 2n\varphi}{\sin^{2n} \varphi} = (2 - i)^{2n}$$

$$\frac{\cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi}{\sin^{2n} \varphi} = (2 + i)^{2n}.$$

Scăzând relaţia 2-a din prima şi înmulţind apoi ambii membri cu i, ţinând seamă că $i^2 = -1$, găsim

$$\frac{2 \sin 2n\varphi}{\sin^{2n} \varphi} = [(2 - i)^{2n} - (2 + i)^{2n}]\, i. \tag{2}$$

De altă parte, ridicând la patrat relaţia (1) şi aplicând apoi o proprietate a proporţiilor, deducem

$$\frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = 5,$$

de unde

$$\frac{1}{\sin^{2n}\varphi} = 5^n.$$

Inlocuind în (2) această valoare, obținem

$$2 \times 5^n \sin 2n\varphi = [(2-i)^{2n} - (2+i)^{2n}]\, i\,.$$

Avem astfel stabilită identitatea cerută.

Verificări: 1°. Pentru $n=2$, identitatea dată devine

(3) $$50 \sin 4\varphi = [(2-i)^4 - (2+i)^4]\, i\,,$$

unde $\varphi = \operatorname{arc\,cotg} 2$, deci

(4) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\cdot$$

Cum,

$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi = 2\,\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

ținând seamă de (4) deducem

$$\sin 4\varphi = 2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{96}{25},$$

deci

(5) $$50 \sin 4\varphi = 48$$

De altă parte

(6) $$[(2-i)^4 - (2+i)^4]\, i = [(2-i)^2 + (2+i)^2] \times$$

$$[(2-i)^2 - (2+i)^2]\, i = 6 \times (-8i)\, i = 48.$$

Privind relațiile 5) și (6), conchidem că identitatea (3) este verificată.

2°. Pentru $n=3$, identitatea dată devine

(7) $$250 \sin 6\varphi = [(2-i)^6 - (2+i)^6]\, i\,,$$

unde $\varphi = \operatorname{arc\,cotg} 2$, deci

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\cdot$$

De aci deducem

(8) $$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1-3\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{11}{2}\cdot$$

Apoi

$$\sin 6\varphi = 2\sin 3\varphi\cos 3\varphi = 2\,\frac{\operatorname{tg} 3\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3\varphi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3\varphi}} =$$

$$\frac{2\operatorname{tg} 3\varphi}{1+\operatorname{tg}^2 3\varphi} = 2\cdot\frac{\frac{11}{2}}{1+\frac{121}{4}} = \frac{44}{125}\cdot$$

deci

(9) $$250 \sin 6\varphi = 88.$$

De altă parte,

(10) $$[(2-i)^6 - (2+i)^6]\, i =$$

$$[(2-i)^3 + (2+i)^3][(2-i)^3 - (2+i)^3]\, i = 4(-22i)i = 88.$$

Privind relațiile (9) și (10), conchidem că identitatea (7) este verificată.

Soluții date de d-nii: *Chiriac C-tin* (N. M. S. Mircea), *Gligor N. Ioan* (Șc. Of. Rez. Art., Craiova), *Manolache Mircea* (lic. Internat, Iași), *Mahrenholz Johannes* (Cotbus), *Negrea A. Mircea* (Brăila) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1947. — *Să se găsească o progresie geometrică de cinci termeni, știind că suma ei este 31, iar suma termenilor de rang impar este 21.*

CORNELIA NANES

Fie a primul termen și r rația progresiei. Conform enunțului avem

$$\begin{cases} a(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) = 31 \\ a(r^4 + r^2 + 1) = 21. \end{cases}$$

Eliminând pe a găsim ecuația reciprocă în r

$$10\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) - 21\left(r + \frac{1}{r}\right) + 10 = 0.$$

Punem

$$r + \frac{1}{r} = x \quad *_* \quad r^2 + \frac{1}{r^2} = x^2 - 2$$

și obținem ecuația

$$10x^2 - 21x - 10 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x_1 = \frac{5}{2}, \qquad x_2 = -\frac{2}{5}$$

care dau pentru a valorile

$$a_1 = 1 \quad \text{şi} \quad a_2 = 16$$

aşa că progresiile căutate sunt

$$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 \quad \text{şi} \quad \div 16 : 8 : 4 : 2 : 1 .$$

Au dat această soluţie D-nii: *Ghimuş A. D.* (lic., Lazăr, Bucureşti); *Gligor N. I.* (Aliuş); *Ionescu F. P.* (lic., Carol I., Craiova); *Iosifescu C.* (lic. P. Rareş, Piatra Neamţ); *Luca I.* (Bacalaureat, Arad). G-l Gh. B.

PROBLEME REZOLVATE

2186. - - In ce bază este făcută împărţirea

$$234520 : 545 = 242, \text{ rest } 22 ?$$

I. V. MATIES

2187. — Să se calculeze

$$\sum_{n=1}^{n} (3n-1)(3n+1)(3n+3).$$

AL TIGANOIU

2188. — Să se stabilească relaţia

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)} = \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\operatorname{cotg}(\theta - 45^0),$$

ştiind că α, β, γ sunt rădăcinele ecuaţiei

$$x^3 - \sin\theta\, x^2 + (\cos\theta)\, x - \operatorname{tg}\theta = 0.$$

VASILE N. FASIE

2189. — Se dau în plan dreptele Δ, Δ' perpendiculare una pe alta, punctul fix P şi punctul O, mobil pe Δ. Cercul cu centrul în O şi cu raza O P taie pe Δ' în A şi B.

Să se găsească locul intersecţiei cercului O cu dreptele care trec prin A şi B şi au o direcţie dată.

G-L GH. BUICLIU

2190 — Intr'un patrulater convex A B C D, avem

$$AB = 20, \quad BC = 5, \quad DA = 9, \quad AC = 15.$$

Să se arate că patrulaterul este inscriptibil.

M. GHERMANESCU

2191. — Dacă, $x + y + z = \pi$, atunci avem:

$$\sec x \operatorname{cosec}(y+z) = 2 \operatorname{cosec} 2x$$

$$\Sigma \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg} z = 3 - \Sigma \sec^2 x$$

$$\Sigma \sin(x+y)\cos z = 2 \sin x \sin y \sin z.$$

EUGEN I. SIPOS

2192 — Să se arate că într'un triunghiu oarecare, avem relaţia:

$$\sum \frac{(a^2-b^2)\sin C}{c^2 \sin(A-B)} = 3 .$$

M. GH. SABAU

2193. — Intrun triunghiu A B C, în care notaţiile sunt obicinuite, avem relaţiile

$$b^2 \cos^2\frac{A}{2}\cos A - a^2\cos^2\frac{B}{2}\cos B + 2ap\cos^2\frac{B}{2} = p^2$$

$$b^2\cos^2\frac{A}{2}\sin A + a^2\cos^2\frac{B}{2}\sin B = ap\sin B .$$

V. ALACI

Precizare. In problema 1917, Vol. XX, punctul F este intersecţia lui PR cu AD.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Avram Gh. Cristache, (2120, 2121, 2125, 2136, 2170, 2171, 2173, 2181, 2185); **Braşoveanu D. Gheorghe,** (2164, 2171); **Cherdivarencu I.,** (P, 2162, 2164, 2168); **Cicereau Gh.,** (2125, 2155, 2162, 2171); **Cochela I. Livius.,** (2170); **Constantinescu N. Ilie,** (2018, 2043, 2057, 2072, 2081, 2106, 2110, 2113, 2125, 2129, 2154, 2168, 2169, 2170); **Creţa F. Gavril,** (2004, 2098, 2103, 2116, 2124, 2131, 2132, 2134, 2135, 2139, 2164, 2174, 2175, 2176, 2181, 2183); **Enache Ion,** (2031, 2052, 2060, 2098, 2162, 2168, 2176); **Filimon Ion,** (2170, 2174); **Georgescu Nicolae,** (2126, 2129, 2134, 2135, 2138, 2145, 2150, 2151, 2162; 2164, 2181); **Giurconiu Gh. Mihail,** (1923, 1931, 2106, 2107, 2162); **Gloden A.,** (N.); **Ieşan Alexandru,** (2139, 2155, 2162); **Kinsky Ioan,** (P; 2135, 2161, 2164, 2165); **Linteş I.,** (A.); **Lupescu Corneliu,** (2155, 2164, 2166, 2170, 2174); **Mahrenholz Johannes,** (2164, 2167, 2169, 2172, 2174, 2175, 2176, 2177); **Pat I. Moise,** (2060, 2162, 2164, 2170, 2174, 2175, 2176); **Pălăceanu D. Vasile,** (P; 2162, 2164, 2166, 2170, 2171, 2174, 2175, 2176); **Pop Emil,** (2057, 2098, 2115, 2162, 2164); **Popescu I. Barbu,** (2026, 2043, 2050, 2151, 2178); **Rogoz N. Ioan,** (2176, 2181); **Sabău Gh. Mihai,** (P; 2017, 2093, 2094, 2095, 2097, 2103, 2105, 2107, 2112, 2113, 2164, 2167, 2181, 2182, 2183, 2185); **Săruleşteanu I. Emanuel,** (P; 1413, 1516, 1928, 1956, 2072, 2085, 2156, 2164); **Ştefănescu Marin,** (2023, 2120. 2121, 2123, 2164, 2169); **Tincu C-tin,** (P; 2018, 2035, 2038, 2043, 2054, 2086, 2098, 2106, 2107, 2116); **Tudor Aurel,** (2115, 2120, 2121, 2134, 2145, 2156, 2157, 2161, 2164); **Ţigănoiu I. Alexandru,** (P; 2089, 2097, 2121, 2172); **Vrânceanu Gh. Gheorghe,** (2161, 2178); **Wegener Eugen,** (P; 1989, 2166, 2170, 2174, 2175, 2176).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXII, cu preţul de lei 300 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

ANUL XXIII. IANUARIE 1944 No. 11.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **I. V. MATIES**: ASUPRA FORMELOR NEDETERMINATE.
2. **V. ALACI**: ASUPRA FORMELOR NEDETERMINATE.
3. NOTE MATEMATICE 27, 28, 29.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1035, 1622, 1652, 1934, 1936, 2085, 2097.
6. PROBLEME PROPUSE: 2194–2201.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasc

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noăstre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), va fi de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIII — NO. 11 TIMISOARA, IANUARIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

ASUPRA FORMELOR NEDETERMINATE

DE

I. V. MĂTIEȘ

1. Se știe că în calculul valorii numerice a unei funcțiuni se pot ivi forme ca: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; 0^0 și ∞^0, numite forme nedeterminate.

D-l *Const. G. Iliovici,* într'un mic studiu [1] asupra unor forme nedeterminate, voiește să elimine din șirul formelor nedeterminate, formele 0^0 și ∞^0, încercând a dovedi că, *valoarea numerică*

$$y(a) = \lim_{x=a} [u(x)]^{v(x)} = 1, \text{ dacă } u(a) = v(a) = 0$$

oricare ar fi funcțiunile $u(x)$ *și* $v(x)$.

Pentru comentariu schițez demonstrarea următoare:

Fie funcția

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

în care $u(a) = v(a) = 0$ și deci $y(a) = 0^0$. Pentru înlăturarea acestei forme, se logaritmează și se obține:

$$\mathrm{L}\, y = v \,\mathrm{L}\, u = \frac{\mathrm{L}\, u}{\frac{1}{v}}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad \mathrm{L}[y(a)] = \lim_{x=a} \frac{\mathrm{L}\, u}{\frac{1}{v}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

și aplicând formula lui *L'Hôpital,* obținem

$$\mathrm{L}[y(a)] = -\lim_{x=a} \frac{v^2 u'}{u \cdot v'} = -\lim_{x=a} \frac{v}{u} \cdot \lim_{x=a} \frac{u'}{v'} \cdot \lim_{x=a} v \,.$$

Cum însă,

$$\lim_{x=a} \frac{v(x)}{u(x)} = \lim_{x=a} \frac{v'(x)}{u'(x)} \to l$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad \lim_{x=a} \frac{u'(x)}{v'(x)} \to \frac{1}{l} \text{ și } \lim_{x=a} v(x) = v(a) = 0\,,$$

se obține

$$\mathrm{L}[y(a)] = -l \cdot \frac{1}{l} \cdot 0 = 0 \qquad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad y(a) = e^0 = 1$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad y(a) = \lim_{x=a} [u(x)]^{v(x)} = 0^0 = e^0 = 1$$

oricare ar fi funcțiile $u(x)$ și $v(x)$.

In mod analog se procedează și pentru ∞^0.

D-l *C. G. Iliovici* trage concluzia că formele 0^0 și ∞^0 având valoarea 1, se pot îngloba în formula $a^0 = 1$ și ca atare s'ar putea scoate din șirul formelor nedeterminate.

2. Subtilitatea acestei chestiuni trebue căutată în natura factorilor $w(x)$, $[w(a) = 0]$, ce îi conțin funcțiile $u(x)$ și $v(x)$; cu alte cuvinte natura infiniților mici către care tind $u(x)$ și $v(x)$, când $x = a$, precum și comportarea lor prin logaritmare, dacă se aplică formula lui *L'Hôpital,* chestiune ce poate îl preocupă și pe D-l *C. G. Iliovici.*

Vom arăta modul variat de comportare a infiților mici față de logaritmarea u^v, către care tind $u(a)$ și $v(a)$ și totdeodată voiu arăta și cazuri când limita lui u^v este diferită de 1, voiu da câteva exemple:

a) *Să se calculeze*

$$y(a) = \lim_{x=a} [u(x)]^{v(x)}, \quad u(x) = (x-a)^m \cdot u_1(x),$$

$$v(x) = (x-a)^n v_1(x)$$

unde $u_1(a)$ *și* $v_1(a)$ *sunt diferiți de zero.*

Expresia dată se poate scrie:

$$y = (x-a)^{m \cdot v} \cdot u_1^v\,;$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad y(a) = \lim_{x=a} \left[(x-a)^{(x-a)}\right]^{m(x-a)^{n-1} \cdot v_1} u_1^v \,.$$

[1] *Const. G. Iliovici:* Greșeli în studiul formelor nedeterminate. Ploești, 1942.

Cum însă

$$[u_1(a)]^{v(a)} = [u_1(a)]^0 = 1 \text{ şi}$$

$$l = \lim_{x=a} (x-a)^{(x-a)}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad \operatorname{Log} l = \lim_{x=a} \frac{\operatorname{Log}(x-a)}{\frac{1}{x-a}} =$$

$$\lim_{x=a} \frac{\frac{1}{x-a}}{-\frac{1}{(x-a)^2}} = -\lim_{x=a}(x-a) = 0.$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad l = e^0 = 1$$

se obţine precis

$$y(a) = \lim_{x=a} [u(x)]^{v(x)} = 1^{m \cdot 0\, v_1(a)}\, u_1(a)^{v(a)} = 1$$

unde $u(x) = (x-a)^m u_1(x)$, $v(x) = (x-a)^n v_1(x)$,

$$u_1(a) \neq 0, v_1(a) \neq 0.$$

Pentru aceste forme ale lui u şi v, expresiunea u^v are sigur valoarea 1 pentru $x = a$ (m şi n întregi şi pozitivi).

b) *Să se calculeze*

$$y(a) = \lim_{x=a} [u(x)]^{v(x)}, \quad u(a) = v(a) = 0$$

având

$$u(x) = (x-a)^m u_1(x), \quad v(x) = \frac{v_1(x)}{\operatorname{Log}(x-a)^n},$$

iar

$$u_1(a) \neq 0, \quad v_1(a) \neq 0.$$

Se vede deci că pentru $x = a$, $u(x)$ tinde către infinitul mic,

$$(x-a)^m u_1(x) \to 0 \,.\, u_1(a), \quad \text{iar } v(x) \to \frac{v_1(a)}{\operatorname{Log} 0} = 0.$$

Spre a calcula $y(a)$, vom aranja astfel:

$$y(a) = \lim_{x=a} \left[(x-a)^{\frac{1}{\operatorname{Log}(x-a)}}\right]^{\frac{m}{n} v_1(x)} u_1^v = l^{\frac{m}{n} v_1} \,.\, u_1^v \,.$$

Dar

$$l = \lim_{x=a} (x-a)^{\frac{1}{\operatorname{Log}(x-a)}}, \quad \operatorname{Log} l = \lim_{x=a} \frac{\operatorname{Log}(x-a)}{\operatorname{Log}(x-a)} = 1$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad l = e \text{ şi } \lim_{x=a} u_1^v = [u_1(a)]^0 = 1$$

se obţine limita căutată:

$$y(a) = e^{\frac{m}{n} v_1(a)}$$

Deci

$$\lim_{x=a} \left[(x-a)^m u_1(x)\right]^{\frac{v_1(x)}{\operatorname{L}(x-a)^n}} = e^{\frac{m}{n} v_1(a)}, \quad u_1(a) \neq 0,\ v_1(a) \neq 0,$$

care în general e definită de 1.

c) *Dacă avem*

$$u(x) = e^{-\frac{n_1(x)}{(x-a)^m}}, \quad v(x) = (x-a)^n v_1(x), u_1(a) \neq 0, v_1(a) \neq 0,$$

limita expresiunii

$$y(x) = \left[e^{-\frac{u_1(x)}{(x-a)^m}}\right]^{(x-a)^n v_1(x)}$$

pentru $x = a$ *poate avea valorile:*

$y(a) = e^{-u_1(a) \,.\, v_1(a)}$ în cazul $n = m$

$y(a) = 1$ în cazul $n > m$

$y(a) = 0$ sau ∞ în cazul $n < m$.

In concluzie, din exemplele date, se vede că forma nedeterminată 0^0 nu are totdeauna valoarea lui $a^0 = 1$ şi ca atare nu poate fi scoasă din şirul formelor nedeterminate.

Concluzie analoagă şi pentru ∞^0.

Tot din aceste exemple se observă că expresiunea u^v pentru $x = a$, prin logaritmare se reduce la raportul a doi infiniţi, ce în unele cazuri sunt de acelaş ordin şi ca atare raportul are limita Log l, iar $u^v \to l \neq 1$.

Notă. Având în vedere, că demonstrarea D-lui *C. G. Iliovici* priveşte funcţiile u şi v în mod general, în timp ce exemplele particulare îi dezaprobă concluzia, e interesant de căutat viciul de demonstrare.

ASUPRA FORMELOR NEDETERMINATE

DE

V. ALACI

1. In articolul cu titlul de mai sus al D-lui *I. V. Matieş*, publicat în acest număr, se răspunde unei lucrări a D-lui *C-tin G. Iliovici*, intitulată: *„Greşeli în studiul formelor nedeterminate“* (Ploeşti, 1942), evidenţiindu-se prin exemple bine alese că, *formele nedeterminate* 0^0 *şi* ∞^0, *nu au totdeauna 1 ca adevărată valoare, cum a încercat să dovedească D-l Iliovici.*

D-l *Mătieş* termină articolul cu *Nota:* „Având în vedere, că demonstrarea D-lui *C. G. Iliovici*, pri-

veşte funcţiile u şi v în mod general, în timp ce exemplele particulare îi dezaprobă concluzia, *e interesant de căutat viciul de demonstraţie*".

2. N-am putea spune că există *un viciu de demonstraţie* în lucrarea D-lui *Iliovici*, afirmăm însă că este o demonstraţie necompletă, fiindcă au fost lăsate la o parte unele cazuri de excepţie, *din care cauză, concluzia D-sale, — că trebue să se elimine din şirul formelor neterminate, formele* 0^0 *şi* ∞^0, *ca având totdeauna 1 ca valoare adevărată, — este greşită.*

Ne propunem să evidenţiem în cele ce urmează, că afirmaţia noastră este justă.

In adevăr, fie funcţia

$$(1) \qquad y = [u(x)]^{v(x)},$$

unde presupunem 1^0. $u(a) = v(a) = 0$;
apoi 2^0. $u(a) = \infty, v(a) = 0$.

In ambele cazuri expresia (1) se reduce respectiv, pentru $x = a$, la formele nedeterminate 0^0 şi ∞^0.

Ne propunem dar, a afla adevărata valoare a funcţiei (1), pentru $x = a$.

Pentru aceasta, în (1) luăm logaritmii neperieni şi avem

$$(2) \qquad \log y = v \log u = \frac{\log u}{\frac{1}{v}},$$

expresie, care pentru $x = a$ se reduce, în ipotezele 1^0 şi 2^0, respectiv, la formele nedeterminate $\mp \frac{\infty}{\infty}$. Aplicăm în (2) regula lui *L'Hôpital*, putem scri succesiv:

$$(3) \qquad \log[y(a)] = \lim_{x=a} \cdot \frac{\frac{u'}{u}}{-\frac{v'}{v^2}} =$$

$$= -\lim_{x=a} \cdot \frac{v}{u} \cdot \lim_{x=a} \cdot \frac{u'}{v'} \cdot \lim_{x=a} \cdot v \,.$$

Fie acum,

$$\lim_{x=a} \cdot \frac{v}{u} = l, \text{ atunci şi } \lim_{x=a} \cdot \frac{v'}{u'} = l, \text{ deci}$$

$$\lim_{x=a} \cdot \frac{u'}{v'} = \frac{1}{l} \text{ şi (3) devine}$$

$$(4) \qquad \log[y(a)] = -l \times \frac{1}{l} \times 0 = 0,$$

deci,

$$y(a) = e^0 = 1$$

şi prin urmare, formele 0^0 *şi* ∞^0 *la care se reduce funcţia* (1) *pentru* $x = a$, *conduc totdeauna la adevărata valoare* 1.

Aceasta este demonstraţia D-lui *Iliovici*, redată de D-l *Mătieş* în articolul D-sale.

Această demonstraţie este însă valabilă, numai dacă se presupune limita l finită şi diferită de zero, căci numai atunci în (4) se simplifică cu l.

Dar, se poate întâmpla ca limita l să fie 0 sau $\pm \infty$, caz pierdut din vedere de D-l *Iliovici*, şi atunci expresia (4) nu se mai reduce la 0, ci devine în ambele cazuri 1^0 şi 2^0, de forma nedeterminată $0 \times \infty$ şi prin urmare putem găsi în unele cazuri, pentru (4) o adevărată valoare $k \neq 0$, de unde rezultă evident

$$y(a) = e^k \neq 1.$$

Prin urmare, formele nedeterminate 0^0 *şi* ∞^0, *nu conduc totdeauna la* 1, *ca adevărată valoare.*

De altfel, vom trata şi două exemple simple, care să evidenţieze concluzia noastră.

1. *Se cere adevărata valoare a expresiei*

$$y = (x)^{\frac{1}{\log \sin x}},$$

pentru $x = 0$.

Soluţie. Expresia dată, pentru $x = 0$, i-a forma nedeterminată 0^0. Aplicând logaritmii, avem

$$\log y = \frac{1}{\log \sin x} \cdot \log x = \frac{\log x}{\log \sin x} \,.$$

Ultimul membru, pentru $x = 0$, i-a forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$, deci putem aplica regula lui *L'Hôpital* şi obţinem

$$\log[y(0)] = \lim_{x=0} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x=0} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x=0} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1,$$

prin urmare,

$$y(0) = e, \quad (e = 2{,}7182\ldots).$$

Adevărata valoare a expresiei date, vedem dar că este diferită de 1.

Observare. In acest exemplu,

$$u = x, \qquad v = \frac{1}{\log \sin x},$$

astfel că,

$$\lim_{x=0} \cdot \frac{v}{u} = \lim_{x=0} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\log \sin x} =$$

$$\lim_{x=0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\operatorname{cotg} x} = -\lim_{x=0} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x \cos x} = -\infty,$$

deci limita l este în acest caz egală cu $-\infty$, cum prevăzusem, că se poate întâmpla în unele cazuri.

2. *Să se găsească limita expresiei*

$$y = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{\sin x},$$

pentru $x = 0$.

Soluţie. Expresia dată pentru $x = 0$, ia forma ∞^0. Aplicând logaritmii, avem

$$\log x = \sin x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot$$

De aci urmează

$$\log [y(0)] = \lim_{x=0} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1,$$

deci

$$y(0) = e, \qquad (e = 2{,}7182\ldots),$$

Observare. In acest exemplu,

$$u = e^{\frac{1}{x}}, \quad v = \sin x,$$

astfel că,

$$\lim_{x=0} \cdot \frac{v}{u} = \lim_{x=0} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

deci limita l este în acest caz egală cu 0, cum prevăzusem că se poate întâmpla în unele cazuri.

3. Credem astfel clarificată chestiunea ce face obiectul articolului ce l-am tratat[1].

Am putea enunţa, în baza expunerei făcute chiar şi următoarea teoremă:

Teoremă. *Pentru ca o expresie de forma* $[u(x)]^{v(x)}$, *care se reduce pentru* $x = a$ *la una din formele nedeterminate* 0^0 *sau* ∞^0, *să admită o adevărată valoare diferită de* 1, *este necesar ca,*

$$\lim_{x=a} \frac{v}{u} = 0, \text{ sau } \pm\infty.$$

[1]) Am comunicat într'o scrisoare D-lui Prof. *Mătieş* lămuririle din acest articol şi D-sa m-a rugat să-i public articolul aşa cum l-a trimis, şi să expun separat şi lămurele mele, ceeace am făcut.

NOTE MATEMATICE

27. — *Patrat magic 1944.*

In cele 9^2 căsuţe sunt scrise numere dela 176 până la 256. Aceste numere consecutive sunt în aşa fel aşezate, ca să avem atât pe diagonală, coloane şi linii suma 1944, care este anul ce a început.

200	240	197	243	178	195	238	198	255
196	207	206	230	181	227	209	252	236
199	208	212	221	184	214	249	224	233
244	231	222	215	187	246	210	201	188
256	253	250	247	216	185	182	179	176
242	229	213	186	245	217	219	203	190
239	204	183	211	248	218	220	228	193
191	180	226	202	251	205	223	225	241
177	192	235	189	254	207	194	234	232

Se poate observa că în interiorul acestui patrat magic sunt trei patrate concentrice de 7^2, 5^2 şi 3^2 căsuţe, care singure pot fi considerate ca magice, căci liniile, coloanele şi diagonalele lor dau o sumă constantă.

Această sumă este respectiv:

$1512 = 7.216$; $1080 = 5.216$; $648 = 3.216$.

Din această cauză, putem spune că avem de a face cu un *carré bordé*.

In acelaş timp suma cuplelor termenilor faţă de căsuţa din mijloc, precum şi celelalte care sunt simetrice faţă de verticala care trece prin centru, ne dau suma:

$$432 = 2.216.$$

Pe de altă parte obţinem relaţiile următoare oricare ar fi x:

(1) $(200+x)^2+(240+x)^2+(197+x)^2+(243+x)^2+$
$(178+x)^2+(195+x)^2+(238+x)^2+(198+x)^2+$
după prima linie
$(255+x)^2=(177+x)^2+(192+x)^2+(235+x)^2+$
$(189+x)^2+(254+x)^2+(237+x)^2+(194+x)^2+$
$(234+x)^2+(232+x)^2$
după linia noua.

(2) $(200+x)^2+(196+x)^2+(199+x)^2+(244+x)^2+$
$(256+x)^2+(242+x)^2+(239+x)^2+(191+x)^2+$
după coloană întâia
$(177+x)^2=(255+x)^2+(236+x)^2+(233+x)^2+$
$(188+x)^2+(176+x)^2+(190+x)^2+(193+x)^2+$
$(241+x)^2+(232+x)^2$
după coloana noua.

(3) $(207+x)^2+(206+x)^2+(230+x)^2+(181+x)^2+$
$(227+x)^2+(209+x)^2+(252+x)^2=(180+x)^2+$
$(226+x)^2+(202+x)^2+(251+x)^2+(205+x)^2+$
$(223+x)^2+(225+x)^2.$

(4) $(207+x)^2+(208+x)^2+(231+x)^2+(253+x)^2+$
$(229+x)^2+(204+x)^2+(180+x)^2=(252+x)^2+$
$(224+x)^2+(201+x)^2+(179+x)^2+(203+x)^2+$
$(228+x)^2+(225+x)^2.$

(5) $(212+x)^2+(221+x)^2+(184+x)^2+(214+x)^2+$
$(249+x)^2=(183+x)^2+(211+x)^2+(248+x)^2+$
$(218+x)^2+(220+x)^2.$

(6) $(212+x)^2+(222+x)^2+(250+x)^2+(213+x)^2+$
$(183+x)^2=(249+x)^2+(210+x)^2+(182+x)^2+$
$(219+x)^2+(220+x)^2.$

(7) $(215+x)^2+(187+x)^2+(246+x)^2=$
$(186+x)^2+(245+x)^2+(217+x)^2.$

(8) $(215+x)^2+(247+x)^2+(186+x)^2=$
$(246+x)^2+(185+x)^2+(217+x)^2.$

POPESCU I ADRIAN

---

28. — *Analyse indéterminée.*

I. Résoudre le système diophantien:

$$\begin{cases} x+y+z=2t^2 & (1)\\ x^4+y^4+z^4=2u^4 & (2)\end{cases}$$

On a l'identité connue (voir p. ex. *Carmichael*, Analyse indéterminée, pag. 86):

$$(m^2-n^2)^4+(2mn+n^2)^4+(m^2+2mn)^4=$$
$$2(m^2+mn+n^2)^4.$$

L'équation (1) donne la condition:

$$2m^2+4mn=2t^2, \text{ ou } m^2+2mn=t^2,$$

satisfaite par

$$m=p^2,\ n=2pq+2q^2,\ t=p^2+2pq.$$

On aura donc

$$\begin{cases}[p^4-(2pq+2q^2)^2]+[2p^2(2pq+2q^2)+(2pq+2q^2)^2]+\\ \qquad [p^4+2p^2(2pq+2q^2)]=2(p^2+2pq)^2\\ [p^4-(2pq+2q^2)^2]^4+[2p^2(2pq+2q^2)+(2pq+2q^2)^2]^4+\\ [p^4+2p^2(2pq+2q^2)]^4=2[p^4+2p^2q(p+q)+4q^2(p+q)^2]^4.\end{cases}$$

Exemple numérique.

$$p=3,\quad q=1$$

$$\begin{cases}17+208+225=2.15^2\\ 17^4+208^4+225^4=2.217^4 (=4.434.747.842).\end{cases}$$

Remarquons que, dans cette solution, on a $z=t^2$.

II. Résoudre $x^4+y^4+z^4=2U^8$ en nombres entiers.

Il suffit de poser $m^2+mn+n^2=U^2$, ce qui nous donne:

$$m=p^2-q^2,\quad n=2pq+q^2,\quad U=p^2+pq+q^2.$$

On peut donc obtenir les expressions des inconnues x, y, z, U en fonction des 2 paramétres p et q.

Exemple numérique.

$$p=2,\quad q=1$$

$$16^4+55^4+39^4=2.7^8 \text{ ou } 2^{16}+55^4+39^4=2.7^8$$
$$\text{ou } 4^8+55^4+39^4=2.7^8.$$

N. On peut obtenir, en employant ce procédé de façon réitérée, une solution de

$$x^4+y^4+z^4=2U^k \qquad (k=2^l).$$

III. Résoudre $x^8+y^4+z^4=2u^4$ en nombres entiers.

On a les 3 identités:

$$(p^2-q^2)^8+[4pq(p^2+pq+q^2]^4+[(p^2+q^2)p^2+q^2+4pq]^4=$$
$$2[(p^2+q^2)^2+2pq(p^2+q^2)+4p^2q^2]^4.$$
$$(2pq)^8+[(p^2-q^2)(3p^2+q^2)^4+[(p^2+q^2)(3p^2-q^2)]^4=$$
$$2.[(p^2+q^2)^2+p^4-q^4+(p^2-q^2)^2]^4.$$
$$(p^2+2pq)^8+[p^4-(2pq+2q^2)^2]^4+$$
$$[(2pq+2q^2)^2+2p^2(2pq+2q^2)]^4=$$
$$2.[p^4+p^2(2pq^2+2q^2)+(2pq+2q^2)^2]^4.$$

Exemples numériques.

$$p=2,\quad q=1$$

$3^8+56^4+65^4=2.61^4=(27.691.682)$

$4^8+39^4+55^4=2.49^4$ (identité déjà trouvée)

$4^8+5^4+21^4=2.19^4(=260.642)$.

La même remarque que plus haut peut être faite relativement à la résolution de l'équation

$$x^k+y^4+z^4=2u^4\,(k=2^l).$$

A. GLODEN

---

29 — *Volumul tetraedrului, cunoscând ecuaţiile feţelor.*

Ca urmare notei din Nr. 10 an. XXIII pag. 115 a acestei reviste, îmi propun urmând aceiaşi metodă, să stabilesc formula analoagă şi pentru volumul tetraedrului.

Fie ecuaţiile feţelor:

$$(P_1)\qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$(P_2)\qquad A_2x+B_2y+C_1z+D_1=0$$

$$(P_3)\qquad A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

$$(P_4)\qquad A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.$$

Pentruca aceste patru plane să formeze un tetraedru, trebue ca determinantul,

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix},$$

precum şi minorii coloanei a patra să fie diferiţi de zero.

Fie vârfurile tetraedrului: $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$; $D(x_3, y_3, z_3)$; $C(x_4, y_4, z_4)$, respectiv la intersecţiile planelor; (P_1, P_2, P_3); (P_1, P_2, P_4); (P_2, P_3, P_4); (P_1, P_3, P_4).

Inmulţind în determinantul Δ coloanele; întâia, a doua şi a treia respectiv cu x_1, y_1, z_1 şi adunându-le al coloana patra, primim:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 0\\ A_2 & B_2 & C_2 & 0\\ A_3 & B_3 & C_3 & 0\\ A_4 & B_4 & C_4 & A_4x_1+B_4y_1+C_4z_1+D_4 \end{vmatrix}$$

sau

$$(1)\quad \Delta=(A_4x_1+B_4y_1+C_4z_1+D_4)\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

In mod analog, avem

$$(2)\quad \Delta=-(A_3x_2+B_3y_2+C_3z_2+D_3)\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$$

$$(3)\quad \Delta=-(A_1x_3+B_1y_3+C_1z_3+D_1)\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$$

$$(4)\quad \Delta=(A_2x_4+B_2y_4+C_2z_4+D_2)\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_3 & C_3 & C_3\\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}.$$

Dacă facem figura, observăm, că planul (P_4), conţine vârfurile: $B(x_2, y_2, z_2)$, $D(x_3, y_3, z_3)$ şi $C(x_4, y_4, z_4)$, aşa că ecuaţia lui o mai putem scrie şi astfel:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Comparând cele două ecuaţii ale lui (P_4), rezultă:

$$\frac{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & 1\\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{A_4}=\frac{\begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1\\ x_3 & z_3 & 1\\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{-B_4}=\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{C_4}.$$

Sau observând că determinanţii dela numărător sunt respectiv dublul proecţiei ariei triunghiului B D C pe planurile de coordonate $x=0$; $y=0$; $z=0$ şi notându-le cu S_x, S_y, S_z, avem:

$$\frac{S_x}{A_4}=\frac{S_y}{-B_4}=\frac{S_z}{C_4}=\frac{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}=\frac{S}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}},$$

S fiind aria triunghiului B D C.

De aici, avem

$$S_x=\frac{A_4\cdot S}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}},$$

sau încă:

$$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\,A_4\,S}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}.$$

In membrul întâiu, scăzând din linia doua linia întâia şi din a treia pe a doua, desvoltând primim:

$$(6)\quad (y_3-y_2)(z_4-z_3)-(y_4-y_3)(z_3-z_2)=\frac{2\,A_4\,.\,S}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}.$$

Muchia CD fiind la intersecţia planelor (P_3) şi (P_4), putem scrie:

$$\begin{cases} A_3(x_4-x_3)+B_3(y_4-y_3)+C_3(z_4-z_3)=0, \\ A_4(x_4-x_3)+B_4(y_4-y_3)+C_4(z_4-z_3)=0 \end{cases}$$

şi de aici:

$$\frac{x_4-x_3}{\begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix}} = \frac{y_4-y_3}{-\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix}} = \frac{z_4-z_3}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}} = k$$

sau

$$(7)\quad \begin{cases} x_4-x_3=k\,.\begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix} \\ y_4-y_3=-k\,.\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix} \\ z_4-z_3=k\,.\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Tot aşa muchia BD fiind la intersecţia planelor (P_2), (P_4) şi procedând la fel, vom obţine:

$$(8)\quad \begin{cases} x_3-x_2=k_1\,.\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix} \\ y_3-y_2=-k_1\,.\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix} \\ z_3-z_2=k_1\,.\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Determinarea lui k şi k_1 în funcţie de coeficienţii planelor.

Valorile lui x_4, y_4, z_4 din (7), să le înlocuim în (4) şi observând că,

$$A_2x_3+B_2y_3+C_2z_3+D_2=0,$$

primim:

$$\Delta=k\,.\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$$

de unde:

$$(9)\quad k=\frac{\Delta}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}$$

La fel, înlocuind valorile lui x_3, y_3, z_3 din (8) în (3) şi observând că:

$$A_1x_2+B_1y_2+C_1z_2+D_1=0.$$

Avem:

$$(10)\quad k_1=\frac{\Delta}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}$$

Egalitatea (6), ţinând seama de (7) şi (8) devine:

$$k\,k_1\left[\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix}\right]=\frac{2\,A_4\,S}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}.$$

Un calcul uşor, ne arată că:

$$\begin{vmatrix} A_3C_3 \\ A_4C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2B_2 \\ A_4B_4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A_3B_3 \\ A_4B_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2C_2 \\ A_4C_4 \end{vmatrix}=A_4\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$$

şi deci,

$$S=\frac{k\,.\,k_1\,.\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}{2},$$

sau ţinând seama de valorile lui k şi k_1, avem:

$$(11)\quad S=\frac{\Delta^2\,.\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}{2\,.\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}.$$

Luând acum ca bază triunghiul BDC şi ca înălţime distanţa dela vârful A $(x_1\,y_1,z_1)$ la planul P_4 — BDC — volumul este:

$$V=\frac{S\,.\,I}{3}\text{ unde, }I=\frac{A_4x_1+B_4y_1+C_4z_1+D_5}{\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}.$$

Dar din (1), avem:

$$A_4 x_1 + B_4 y_1 + C_4 z_1 + D_4 = \frac{\Delta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & B_3 \end{vmatrix}}$$

şi deci

$$I = \frac{\Delta}{\sqrt{A_4^2 + B_4^2 + C_4^2} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}.$$

Înlocuind în formula volumului, expresiunile lui S şi I, obţinem formula

$$6V = \frac{\Delta^3}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}.$$

Am evitat astfel în ambele cazuri, să lucrăm cu determinanţi reciproci.

ST. MUSTA.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, An. XLIX, No. 4, Decemvrie 1943. Centenarul Artileriei Române, de G-l *Gh. Buicliu*, Cuvântarea D-lui General de Corp de Armată *V. Atanasiu*, în şedinţa dela 29 Noemvrie 1943. Schiţarea unei balistice aeriene, de Comandor *I. Linteş*. O problemă de mecanică artileristică, de Cpt. *I Gh. Zamfirescu*. Asupra teoremei lui *Robert-Duchêsne*, de Slt. *C-tin Pantelimon*. Un şir de desfăşurate succesive, de *Adrian Gheorghiu*. Note matematice; Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Ştiinţă şi Progres*, An. IX, Nr. 1, Noemvrie 1943. Cuvânt înainte. La deschiderea anului şcolar 1943/1944. Metodă pentru aflarea conicei osculatoare la o curbă plană, de Prof. *N. Abramescu*. Viaţa lui *Galileo Galilei* (1564—1642), de *Victor Marian*. Pedosfera, de Prof. Dr. *Amilcar Vasiliu*. Un nou sistem de unităţi ştiinţifice, de Prof. Dr. *Teofil Vescan* O pagină de aur din istoria matematicilor, de *Nicolae V. Ghircoiaşiu*. Probleme rezolvate şi propuse. † Profesorul *Ion Tutuc*.

3. Dr. Ing. *Plautius Andronescu. Calculul vectorial*.
Este un volum de 130 pagini, tipărit pe hârtie velină, în condiţii tehnice escelente.
Această minunată carte didactică, scrisă într'un stil clar şi uşor de urmărit, este un dar preţios făcut de Rectorul Politehnicei din Timişoara, studenţilor de la Universităţile şi Politehnicele noastre.
Ea cuprinde cunoştinţi complete, într'un domeniu relativ nou, ce izvoresc dintr'o bogată experienţă şi o dragoste nemărginită de şcoală.
Suntem siguri că harnicii noştrii studenţi de la Ştiinţe şi Politehnici, se vor grăbi să-şi procure acest volum, atât de folositor lor. A se adresa la, Laboratorul de Electrotehnică al Politehnicei, Timişoara; preţul 350 (trei sute cincizeci) lei.
4. *Michel Ghermăuescu*. Sur une équation fonctionnelle. (Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, T. XXVI, Nr. 2).
5. Dr. *Emil Botiş* Memoriu de titluri şi lucrări.

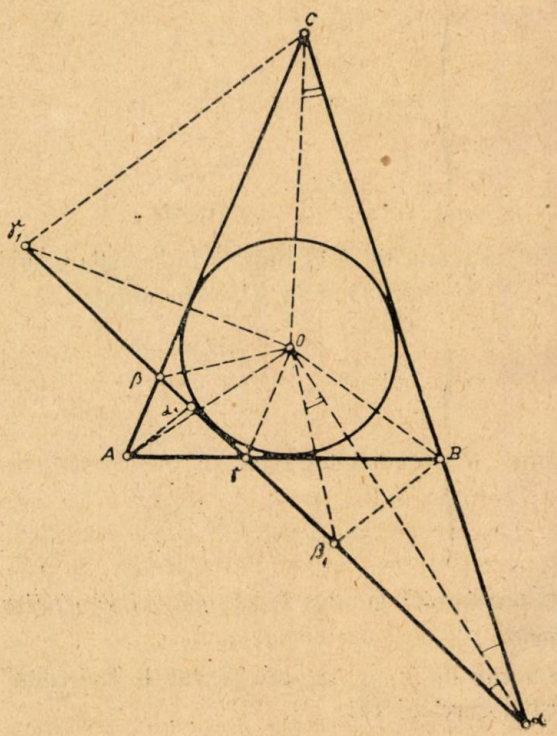
PROBLEME REZOLVATE

Problema 1035. — *Se consideră un triunghiu oarecare circumscris unui cerc cu centrul în* O. — *O tangentă oarecare la cercul* O *taie laturile* BC, CA, AB *respectiv în* α, β, γ. — *Perpendicularele în* O *pe dreptele* $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ *taie tangenta considerată, în* α_1, β_1, γ_1. — *Să se arate că dreptele* $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *sunt paralele.*

C. COSNITA

Se vede pe figură că $O\alpha$ este bisectoarea unghiului $B\alpha\beta$, format de tangentele αB, $\alpha\beta$ la O. Deci în triunghiurile $CO\alpha$ şi $\beta_1 O\alpha$ avem

$$\sphericalangle C\alpha O = \sphericalangle \beta_1 \alpha O.$$



Apoi din triunghiul $\alpha O\beta$ se scoate

$$\sphericalangle \beta_1 O\alpha = \pi - [\sphericalangle \beta_1 O\beta + \sphericalangle \beta\alpha O + \sphericalangle O\beta\alpha]$$

$$\sphericalangle \beta_1 O \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[\sphericalangle \beta\alpha C + \sphericalangle \alpha\beta C] = \frac{C}{2} = \sphericalangle OC\alpha$$

Triunghiurile $\alpha O \beta_1$ şi $\alpha O C$ sunt asemeni, de unde

$$(1) \qquad \overline{\alpha\beta_1} \cdot \overline{\alpha C} = \overline{\alpha O}^2 .$$

La fel găsim

$$(2) \qquad \overline{\alpha\beta_1} \cdot \overline{\alpha B} = \overline{\alpha O}^2 .$$

Din (1) şi (2) scoatem

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\alpha\beta_1}}{\overline{\alpha\gamma_1}},$$

care arată că $B\beta_1$ şi $C\gamma_1$ sunt paralele. La fel se arată că $A\alpha_1$ este paralelă cu aceste două drepte.

Notă. 1°. Această frumoasă şi elementară soluţie a fost trimisă la 21 Iunie 1932 de D-l *N. N. Mihăileanu*, pe atunci elev la liceul din Constanţa. — D-sa a dat problemei încă două soluţii, una trigonometrică şi una analitică.

2°. O foarte bună soluţie trigonometrică s-a primit şi de la D-l *Pop I. Leontin*, (Politechnica din Timişoara).

3°. In soluţia precedentă s-a făcut uz *numai* de faptul că O este tritangent laturilor triunghiului. Deci proprietatea este adevărată şi pentru cercurile exînscrise.

4°. Problema 1035 este un caz particular al următoarei teoreme generale şi cunoscute; *O transversală Δ taie laturile unui triunghiu în α, β, γ. Perpendicularele într'un punct O pe $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ taie pe Δ în α_1, β_1, γ_1. Dreptele $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sunt concurente.* G-l Gh. B.

Problema 1622. — *Se dau două axe rectangulare pe care se iau respectiv punctele* M *şi* N. *Din* N *se duce un fascicol de drepte, iar din* M *fascicolul normal acestuia. Să se arate că:*

1. Punctele $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_n$ *de intersecţie a celor două fascicole sunt conciclice.*

2. Cercul ce conţine aceste puncte trece şi prin punctul O *de intersecţie al celor două axe.*

MIHAIL ST. BOTEZ

Soluţie. R_0 fiind intersecţia dreptelor perpendiculare NR_0 şi MR_0, se va găsi pe cercul de diametru MN. Deoarece R_0 este un punct oarecare, toate punctele R_i se vor găsi pe acest cerc. In particular punctul O, fiindcă axele fac si ele parte din fascicolele normale considerate.

Soluţie dată de D-nii: *Aniţescu N. Nicolae, Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Jidanu I. C.* (Beiuş), *Negrea A Mircea* (Brăila), *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Stamate I Ionel* (Cluj), Sub-Lt. *Ştefănescu F. Marin* (Alba Iulia) şi *Tilică C. Ştefan* (T. Severin).

GH TH. GH

Problema 1652. — *Să se găsească rădăcinile întregi ale sistemului*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \sqrt{z} = 23, \\ x + \sqrt{y} + z = 13, \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 7. \end{cases}$$

NICOLAE BRADEANU

Soluţie. Depe forma sistemului se citeşte că y şi z trebuesc să fie două numere pozitive. Ultima ecuaţie scăzută din prima, ne dă: $z - \sqrt{z} = 6$. Singurul număr întreg şi pozitiv care satisface acestei ecuaţii este $z = 9$. Primele două ecuaţii devin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

care ne spun că y trebue să fie un pătrat perfect în aşa fel, ca pătratul lui să nu întreacă pe 20. Trebue deci ca $y = 0, 1, 4$. Singura soluţie care satisface este $y = 4$, $x = 2$. Soluţia sistemului este deci: $x = 2$, $y = 4$, $z = 9$.

Soluţii primite dela D-nii *N. N. Aniţescu*, *H. Dăscălescu* (Focşani), *C. I. Hermann* (Blaj), *C. I. Jidanu* (Beiuş), Sub-Lt. *C. Lupescu* (Roman), *A. C. Mihăileanu* (Arad), *E. S. Modâlcă* (T. Severin), *V. Şandor*, *Z. Segal* (Vaslui), *I. Slavov* (Bolgrad), *N. I. Staicu* (Târgovişte), *Şt. C. Tilică* (T. Severin) şi *A. Voicu* (T. Mureş)

GH. TH. GH.

Problema 1934. — *Să se arate că între unghiurile unui triunghiu* A B C *există relaţia:*

$$\Sigma \sin 2A (\cos^2 B + \cos^2 C) = 2 \sin A \sin B \sin C.$$

MINEA V. ALDEA

Soluţie dată de D-l A. Gloden (Luxemburg).

Pornim dela relaţia cunoscută

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = 1$$

(Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M", p. 68), care se mai poate scri

$$(1) \qquad \cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos A \cos C \sin B = \sin A \sin B \sin C.$$

Dar,

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

astfel că, primul termen din (1) se poate scri

$$(2) \qquad \cos A \cos B \sin C = \sin A \cos A \cos^2 B + \sin B \cos B \cos^2 A.$$

Permutând circular pe A, B, C şi înlocuind termenii din primul membru ai relaţiei (1), cu valorile lor din (2) şi analoagele ei, obţinem

$$\sin A \cos A \cos^2 B + \sin B \cos B \cos^2 A +$$
$$\sin B \cos B \cos^2 C + \sin C \cos C \cos^2 B +$$
$$\sin C \cos C \cos^2 A + \sin A \cos A \cos^2 C =$$
$$\sin A \sin B \sin C,$$

sau

$$\Sigma \sin A \cos A (\cos^2 B + \cos^2 C) = \sin A \sin B \sin C.$$

Multiplicând ambii membrii cu 2, avem

$$\Sigma \sin 2A (\cos^2 B + \cos^2 C) = 2 \sin A \sin B \sin C,$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţia 2-a. Notând cu E primul membru, dezvoltându-l şi grupând altfel termenii, putem scri succesiv

$$(3) \quad E = \Sigma \cos^2 A (\sin 2B + \sin 2C) =$$
$$\Sigma 2 \cos^2 A \sin (B + C) \cos (B - C) =$$
$$\Sigma 2 \cos^2 A \sin A (\cos B \cos C + \sin B \sin C) =$$
$$\cos A \cos B \cos C \Sigma \sin 2A +$$
$$2 \sin A \sin B \sin C \Sigma \cos A.$$

Cum avem însă cunoscute relaţiile

$$\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C,$$
$$\Sigma \cos^2 A = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

relaţia (3) devine

$$E = 4 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C +$$
$$2 \sin A \sin B \sin C (1 - 2 \cos A \cos B \cos C).$$

Simplificând, găsim

$$E = 2 \sin A \sin B \sin C,$$

adică tocmai relaţia cerută.

Bune soluţii, dar mai lungi, date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Ion* (lic. Milit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (Aliuş), *Goga F.* (student, Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Mahranholz Johannes* (Cottbus), *Popescu Adrian* (Polit., Timişoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1936. — *Să se demonstreze că într'un triunghiu* A B C, *în care notaţiile sunt obicinuite, avem relaţia:*

$$Cp\frac{A}{2} Cp\frac{B}{2} Cp\frac{C}{2} - 2\left(Cp\frac{A}{2} + Cp\frac{B}{2} + Cp\frac{C}{2}\right) = \frac{4R}{r} - 4,$$

unde $Cp\,\alpha$ *înseamnă cosecanta patratică de* α.

A. Gloden.

Soluţie. Folosind formula

$$Cp\,\alpha = 1 + \operatorname{cotg}\,\alpha,$$

valabilă pentru $0 \leqq \alpha \leqq 90^0$ („Trigonomotria patratică", p. 11) şi notând cu E primul membru al relaţiei cerute, avem succesiv:

$$(1) \quad E = \left(1 + \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) -$$
$$2\left(3 + \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) =$$
$$1 + \Sigma \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \Sigma \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} +$$
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} - 6 - 2\Sigma \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Cum

$$\Sigma \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

(Compléments de Trigonométrie, par "F. G. M.", p. 70), relaţia (1) se simplifică şi devine

$$(2) \quad E = \Sigma \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} - 5$$

Cum avem cunoscute încă relaţiile

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{r_a}{r}, \quad r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

(Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M.", p. 177 şi p. 178), egalitatea (2) ne dă:

$$E = \Sigma \frac{r_a}{r} - 5 = \frac{r_a + r_b + r_c}{r} - 5 =$$
$$\frac{4R + r}{r} - 5 = \frac{4R}{r} - 4.$$

Astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluţii bune date de d-nii: *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2085. — *Să se determine intervalele în care poate varia* λ, *real, astfel ca ecuaţia*

$$x^3-3x^2-3x+\lambda^2\sqrt{2}+5=0,$$

să admită toate rădăcinele reale.

In urmă, să se determine λ, astfel ca ecuaţia dată să admită o rădăcină dublă.

V. ALACI

Soluţie. 1° Însemnăm cu $f(x)$ primul membru al ecuaţiei date şi anulând derivata, avem

$$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt $1-\sqrt{2}$ şi $1+\sqrt{2}$.

Observând că,

$$f(1-\sqrt{2})=1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}--3+$$
$$6\sqrt{2}-6-3+3\sqrt{2}+\lambda^2\sqrt{2}+5=\sqrt{2}(\lambda^2+4),$$
$$f(1+\sqrt{2})=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}-3--6\sqrt{2}-$$
$$6-3-3\sqrt{2}+\lambda^2\sqrt{2}+5=\sqrt{2}(\lambda^2-4)$$

şi formând şirul lui *Rolle*, conform celor cunoscute din teoria ecuaţiilor, avem

$$f(-\infty)=-\infty,$$

$$f(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}(\lambda^2+4),\ f(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}(\lambda^2-4),\ f(+\infty)=+\infty.$$

Pentru ca ecuaţia dată să admită trei rădăcini reale, trebuie ca şirul lui *Rolle* să prezinte trei variaţii de semn, trebuie deci să avem

$$\lambda^2+4>0, \quad \text{şi} \quad \lambda^2-4<0.$$

Cum λ^2+4 este totdeauna pozitiv pentru λ real, rămâne de satisfăcut a 2-a inegalitate, care are loc pentru

$$\boxed{-2<\lambda<2}$$

şi astfel prima parte a problemei este terminată.

2°. Trecem la a 2-a parte a problemei.

Pentru ca ecuaţia dată să admită o rădăcină dublă, trebuie ca ea să aibă o rădăcină comună, cu ecuaţia derivată, deci trebuie să aibă rădăcina $1-\sqrt{2}$, sau $1+\sqrt{2}$. Pentru ca $1-\sqrt{2}$ să fie rădăcină a ecuaţiei date, trebuie ca

$$\lambda^2+4=0,$$

deci

$$\boxed{\lambda=\mp 2i}, \qquad (i=\sqrt{-1},$$

Pentru ca $1+\sqrt{2}$ să fie rădăcină a ecuaţiei date, trebuie ca

$$\lambda^2-4=0,$$

deci

$$\boxed{\lambda=\pm 2}.$$

Soluţii bune date de d-ra *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii; *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Belea C. Gh.* (lic. Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Bordaşiu I. Nicolae* (lic. Beiuş) *Chiriac C.* (Lt), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Georgescu C. Nicolae* (Polit., Timişoara), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Iosifescu Cicerone*, *Kinsky Ioan*, *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat. I. Moise* (Polit. Timişoara), *Păl㎃ceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Şipos I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Stretea Alexandru* şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2097. — — *Să se arate că în orice triunghiu avem*

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{h_a\,h_b\,h_c}{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$$

unde

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin B & \sin C & \sin A \\ \sin C & \sin A & \sin B \end{vmatrix}$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triuughiu A B C.

D-TRU TARALUNGA

Soluţie. Dacă ţinem seamă de relaţiile cunoscute

(1) $a=2R\sin A, \quad b=2R\sin B, \quad c=2R\sin C,$

atunci determinantul Δ, se poate scri evident

$$\Delta=8R^3\Delta_1,$$

de unde

(2) $$\frac{\Delta}{\Delta_1}=8R^3.$$

De altă parte, fiindcă în triunghiul A B C, avem

$$h_a=b\sin C, \quad h_b=c\sin A, \quad h_c=a\sin B,$$

rezultă, având în vedere şi relaţiile (1),

$$h_a\,h_b\,h_c=a\,b\,c\ \sin A\sin B\sin C=$$
$$8R^3\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C,$$

de unde

(3) $$\frac{h_a h_b h_c}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} = 8R^3.$$

Acum, din relaţiile (2) şi (3), rezultă

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{h_a\, h_b\, h_c}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Popescu* (Lic. Milit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt, Marina Regală), *Colesnic I. D-tru* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâtă Gh. Gheorghe* (Lic., Tg.-Jiu), *Georgescu Nicolae* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (Universitatea, Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Iacob Şt. Eugen* (Cpt.), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu S. Antim*, *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Popescu Adrian* (Polit., Timişoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit, Timişoara), *Şipos I. Eugen* (Polit. Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara, *Ţigănoiu I. Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2194. — Să se găsească un patrat de patru cifre de aceiaşi paritate.

C. C. TINCU

2195. — Să se arate că ori care ar fi întregul N mai mare ca 1, expresia

$$E = N^{41} - N^{34} - N^{33} + N^{26} - N^{15} + N^8 + N^7 - 1$$

este multiplu de 1944

AL. TIGANOIU

2196. — Se dau numerile,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2-\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Să se arate că suma acestor numere este $\frac{5}{\sqrt{2}}$, iar suma produselor lor câte două, este $\frac{10}{3}$.

V. ALACI

2197. — Să se rezolve şi să discute ecuaţia

$$x^4 - 2x^3 + ax^2 + (1-a)x + b = 0.$$

G-L GH. BUICLIU

2198. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x(x+y^2) = x^2+y \\ 2y(x^2+y) = x+y^2. \end{cases}$$

EUGEN WEGENER

2199. — Să se arate că suma patratelor rapoartelor distanţelor vârfurilor B şi C; C şi A; A şi B, ale unui triunghiu oarecare A B C, înscris în cercul A B C, la diametrele AA_1, BB_1, CC_1, este egală cu suma produselor dintre rapoartele distanţelor vârfurilor A; B; C la proecţiile vârfurilor B şi C; C şi A; A şi B pe diametrele AA_1, BB_1, CC_1 şi respectiv rapoartele distanţelor vârfurilor A_1, B_1, C_1, la aceleaşi proeccţii.

IOAN N. GLIGOR

2200. — Pe muchile B C, C A, A B, D A, D B, D C ale unui tetraedru, se înseamnă punctele arbitrare α, β γ, α', β', γ'. Planele paralele la feţele B C D, C D A, D A B, A B C duse prin centrele de greutate ale tetraedrelor $A\beta\gamma\alpha'$, $B\gamma\alpha\beta'$, $C\alpha\beta\gamma'$, $D\alpha'\beta'\gamma'$, formează un tetraedru al cărui volum este constant.

V. THÉBAULT

2201. — Să se determine modulul şi argumentul numărului complex

$$Z = \sqrt[m]{\frac{1-z}{1+z}}, \qquad (m, \text{ întreg şi pozitiv}),$$

unde $|z| = 1$. Să se găsească condiţia cu $|Z| = 1$. In acest caz, ce devine Z pentru $m = i$, unde $i = \sqrt{-1}$?

EUGEN I. SIPOS

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Baicaș Victor, (2187, 2191, 2198); **Cârnațiu I. Ioan,** (2115, 2116, 2123, 2124, 2130, 2132, 2139, 2156, 2164, 2172, 2175, 2180, 2181, 2186); **Cherdivarencu Ioan,** (2139, 2143, 2170); **Chiriac C-tin,** (1907, 1955, 1959, 1969, 1991, 2002, 2011, 2075, 2103, 2106, 2139, 2166); **David Vasile,** (2056, 2087, 2096, 2110, 2164, 2181, 2182, 2184, 2185); **Enache Ion,** (1667, 1763, 1966, 1956, 2182); **Gaiu N.,** (P.); **Gligor N. Ioan,** (1842, 1906, 1907, 1922, 2057, 2060, 2097, 2098, 2105, 2107, 2112, 2120, 2129, 2134, 2145, 2151, 2156, 2161, 2162, 2164, 2175, 2181, 2183, 2187, 2188, 2191, 2192); **Godea Ioan,** (1756, 2002, 2011, 2056, 2096, 2107, 2121, 2148, 2168, 2176, 2178, 2180, 2181, 2182, 2183, 2185); **Hendli M. Martin,** (1756, 2002, 2087, 2096, 2110, 2116, 2121, 2164, 2168, 2180, 2181, 2182, 2184, 2185); **Maliță A. Mircea,** (2148, 2149, 2152, 2161, 2169, 2181, 2185); **Mahrenholz Johannes,** (2178, 2180, 2185); **Munteanu Gh. Lucian,** (P; 2115, 2148, 2162, 2164); **Muțiu S. Aritim,** (2018, 2034, 2054, 2059, 2085, 2095, 2097, 2107, 2110, 2112, 2113, 2115, 2120, 2121, 2134, 2141, 2145, 2148, 2150, 2151, 2155, 2156, 2157, 2161, 2162, 2164, 2168, 2176, 2181); **Pop Emil,** (2155, 2181); **Rădoiu Nicolae,** (P; 2115, 2124, 2164, 2183); **Rogoz V. Ioan,** (2138, 2155, 2162, 2164, 2178, 2181); **Szabo Iuliu,** (2181); **Tincu C. C-tin,** (2033, 2052, 2081, 2105, 2113, 2146 2181); **Tarța Valeria,** (2156, 2157, 2164, 2182, 2187, 2191, 2192); **Tăușanu I. Horia,** (2155, 2164, 2181); **Țigănoiu Alexandru,** (P; 2178, 2181, 2183); **Vrânceanu Gh. Gheorghe,** (2149).

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Legându-se colecțiileR. M. T., anii I—XXII, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 30 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II—XXII, cu prețul de lei 300 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

ANUL XXIII. FEBRUARIE 1944 No. 12.

1943/1944
BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU
CD R104
1—12

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 30 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 250 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 700 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **M GERMANESCU:** ECUATIA $x^2 + a\,x\,y + b\,k^2 = z^k$ IN INTREGI
2. **COMANDOR I. LINTES:** TEOREME SI CONSECINTE ASUPRA DISTRIBUTIEI DE NUMERE PRIME.
3. NOTE MATEMATICE 30, 31.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 939, 2043, 2045, 2052, 2054, 2057. 2098, 2105.
6. PROBLEME PROPUSE: 220–2207.
7. TABLA DE MATERII.
8. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 – 1 Martie 1945), va fi de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIII — NO. 12 TIMISOARA, FEBRUARIE 1944.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 30 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 250 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

ECUAȚIA $x^2+axy+bk^2=z^k$ ÎN ÎNTREGI

DE

M. GHERMĂNESCU

In Nota 22 dela pag. 104 a acestei Reviste, *D. A. Gloden* rezolvă în întregi ecuația

(1) $$x^2+axk+by^2=z^k,$$

pentru orice valoare întreagă și pozitivă a lui k, a și b fiind întregi.

Metoda D-lui *A. Gloden* nu dă soluția *generală* a problemei, deoarece presupune că toți divizorii unui număr de forma $x^2+axy+by^2$ sunt de aceiaș formă, adică $u^2+auv+bv^2$, ceiace nu este adevărat totdeauna căci, de exemplu, divizorii numărului x^2+8y^2 pot fi și de forma $3u^2\pm 2uv+3v^2$ (*Lagrange*, Oeuvres, I, 3, p. 711). Astfel, dacă am vrea să rezolvăm în întregi ecuația

(2) $$x^2+8y^2=z^2,$$

prin metoda D-lui *A. Gloden*, s'ar pierde soluția $x=7, y=3$, corespunzătoare lui $z=11=3.2^2-2.1.2+3.1^2\neq u^2+8v^2$, sau $x=17, y=3$, corespunzătoare lui $z=19=3.2^2+2.1.2+3.1^2\neq u^2+8v^2$.

Este drept că produsul a doi sau mai mulți factori de forma $u^2+auv+bv^2$ este de aceiaș formă, dar reciproca nu este adevărată în întregime, după cum s'a văzut cu exemplul precedent.

Soluția generală a problemei nu se poate da, pentru a și b nedeterminați, dar se poate obține pentru a și b *dați* numericește.

In adevăr, *Lagrange* a demonstrat (loc. cit. p. 700) următoarea teoremă, fundamentală în asemenea probleme

Dacă A *este un divizor al unui număr de forma*

$$Bx^2+Cxy+Dy^2,$$

unde x *și* y *sunt primi între ei,* A *este neapărat de forma*

$$Pu^2+Quv+Rv^2,$$

unde $4PR-Q^2=4BD-C^2$, Q *fiind* $\lesseqgtr$ *decât* P *și* R, *abstracție făcând de semnele numerelor* P, Q, R.

In baza acestei teoreme z fiind în (1) un divizor al primului membru, va fi de forma

$$\alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2,$$

unde

(3) $$4\alpha\gamma-\beta^2=4b-a^2, \text{ cu } \beta\lesseqgtr\sqrt{\frac{4b-a^2}{3}},$$

dacă $4b-a^2>0$, sau $\beta\lesseqgtr\sqrt{\frac{a^2-4b}{5}}$, dacă $4b-a^2<0$.

Ori egalitatea (3) este satisfăcută pentru $\alpha=1$, $\beta=a$, $\gamma=b$, dar mai poate avea și alte soluții.

Fie α, β, γ o soluție; luând $z=\alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2$, vom calcula z^k; vom determina apoi o substituție de forma $u=mA+nB$, $v=\lambda A+\mu B$ — dacă există — astfel în cât z^k să fie de forma $A^2+aAB+bB^2$; în acest caz, soluția generală a ecuației (1) este

(4) $$x=A,\ y=B,\ z=\alpha u^2+\beta uv+\gamma v^2.$$

având atâtea formule câte expresii găsim pentru u și v.

Ca aplicație, să rezolvăm ecuația (2) în întregi. După teorema lui *Lagrange* (loc. cit.), vom lua pentru z

$$z=u^2+8v^2, \quad \text{sau} \quad z=3u^2\pm 2uv+3v^2.$$

In primul caz, identitatea

$$(u^2-8v^2)^2+8(2uv)^2=(u^2+8v^2)^2,$$

arată că putem lua, în afară de un factor sau un divizor comun,

(5) $$x=u^2-8v^2,\quad y=2uv,\quad z=u^2+8v^2,$$

unde u și v sunt întregi arbitrari.

In al doilea caz, identitatea

(6) $a(au^2+buv+cv^2)^2 = a(au^2-cv^2)^2 + b(au^2-cv^2)(2auv+bv^2)+c(auv+bv^2)^2$

permite a scrie

$$(3u^2 \pm 2uv + 3v^2)^2 =$$

$$(3u^2-3v^2)^2 \pm 2(u^2-v^2)(6uv \pm 2v^2)+(6uv \pm 2v^2)^2$$

$$= 9u^4+9v^4+22u^2v^2 \pm 12u^3v \pm 12uv^3$$

$$= (u^2 \pm 6uv + v^2)^2 + 8(u^2-v^2)^2,$$

care arată că putem lua, în afară de un factor constant,

$$(7) \qquad x = u^2 \pm 6uv + v^2, \qquad y = u^2 - v^2,$$

$$z = 3u^2 \pm 2uv + 3v^2,$$

unde u şi v sunt întregi arbitrari. Rezultă că

Soluţia generală în întregi a ecuaţiei (2) este dată de formulele (5) şi (7), în care u şi v sunt întregi arbitrari,

Am dat mai sus o aplicaţie a metodei indicate pentru rezolvarea ecuaţiiior de forma (1); evident că, întâmplător, ecuaţia (2) se poate rezolva pe o cale mai rapidă: o scriem sub forma

$$z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) = 8y^2,$$

deci putem lua

$$z+x = 4\alpha\beta^2, \quad z-x = 4\alpha\gamma^2, \quad y = \alpha\beta\gamma$$

sau

$$z+x = 2\alpha\beta^2, \quad z-x = 2\alpha\gamma^2, \quad y = \alpha\beta\gamma,$$

care dă soluţia generală, compusă din

$$(8) \quad x = \alpha(2\beta^2-\gamma^2), \quad y = \alpha\beta\gamma, \quad z = \alpha(2\beta^2+\gamma^2)$$

şi

$$(9) \quad x = \alpha(\beta^2-2\gamma^2), \quad y = \alpha\beta\gamma, \quad z = \alpha(\beta^2+\gamma^2),$$

şi care se reduc respectiv la (5) şi (7) luând, în prima, $\alpha = 1$, $\beta = 2u$, $\gamma = v$, iar în a doua $\alpha = 1$, $\beta = u+v$, $\gamma = u-v$.

Ecuaţia (2) se mai poate rezolva şi astfel: să punem $x = zX$, $y = zY$; ea devine

$$X^2 + 8Y^2 = 1$$

şi reprezintă o elipsă raportată la axele sale, trecând prin vârful A(1,0). Vom tăia elipsa printr'o dreaptă D, dusă prin A, de ecuaţie

$$Y = \lambda(X-1),$$

unde $\lambda = \frac{u}{v}$ este raţional, iar u şi v sunt prime între ele. A doua intersecţie a acestei drepte cu elipsa este dată de

$$X = \frac{8\lambda^2-1}{8\lambda^2+1} = \frac{8u^2-v^2}{8u^2+v^2},$$

care duce la

$$(10) \qquad \frac{x}{8u^2-v^2} = \frac{y}{\pm 2uv} = \frac{z}{8u^2+v^2} = k,$$

unde k este un întreg sau o fracţie, având ca numitor un divizor comun al numitorilor rapoartelor precedente.

Comparând formulele (10) cu (5) şi (7), se pune întrebarea dacă (10) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (2). Răspunsul este afirmativ. Inadevăr, (10) cuprind (5). Ele cuprind şi pe (7), căci, în cazul când k este o fracţie, având ca numitor un divizor comun al numitorilor rapoartelor din (10), numărătorul va fi un factor comun lui x, y, z, înmulţit printr'un divizor al lui $8u^2+v^2$, care este de formele arătate mai sus.

Era şi normal să fie aşa, căci rotind în mod continuu dreapta D în jurul vârfului A, atingem în mod *necesar* orice punct al elipsei deci, implicit, *toate* punctele cu coordonate raţionale.

Observaţia aceasta este generală, în sensul că metoda de mai sus, datorită lui *Gauss*, dă toate soluţiile problemei totdeauna când dreapta dusă printr'un punct al curbei la care conduce ecuaţia propusă poate trece prin orice alt punct al acestei curbe. In particular, obţinem soluţia generală pentru curbele de gradul al doilea. Astfel, pentru ecuaţia

$$x^2 + axy + by^2 = z^2,$$

obţinem soluţia *generală*

$$(11) \quad \frac{x}{u^2-bv^2} = \frac{y}{\pm u(au+2v)} = \frac{z}{b^2+auv+bv^2} = k,$$

unde u şi v sunt întregi arbitrari, iar k un întreg sau o fracţie având ca numitor divizorul comun al numitorilor rapoartelor precedente. D-l *A. Gloden* a găsit această soluţie cu $k = 1$, dar raţionamentul D-sale nu este concludent.

Profit de ocazie, spre a atrage atenţia că în soluţia generală a unei ecuaţii diofantiene se face o greşală când se ia $k = 1$, subînţelegând că „soluţia

dată este generală, în afară de un factor comun". Cum se vede mai sus, acel factor comun poate fi „divizor" comun, care nu a fost „subînțeles".

Revenind la cazul general al ecuației (1), dacă luăm pentru z o expresie de aceiaș formă cu primul membru, adică

$$z = u^2 + a\,u\,v + b\,v^2 =$$
$$\left(u + \frac{a\,v}{2} + \frac{\delta\,v}{2}\right)\left(u + \frac{a\,v}{2} - \frac{\delta\,v}{2}\right),$$

unde $\delta = \sqrt{a^2 - 4\,b}$, ecuația (1) devine

$$\left(x + \frac{a\,y}{2} + \frac{\delta\,y}{2}\right)\left(x + \frac{a\,y}{2} - \frac{\delta\,y}{2}\right) =$$
$$\left(u + \frac{a\,v}{2} + \frac{\delta\,v}{2}\right)^k \left(u + \frac{a\,v}{2} - \frac{\delta\,v}{2}\right)^k,$$

care arată că putem lua

$$x + \frac{a\,y}{2} + \frac{\delta\,y}{2} = (u^2 + a\,u\,v + b\,v^2)^\lambda \left(u + \frac{a\,v}{2} + \frac{\delta\,v}{2}\right)^{k-2\lambda},$$

$$x + \frac{a\,y}{2} - \frac{\delta\,y}{2} = (u^2 + a\,u\,v + b\,v^2)^\lambda \left(u + \frac{a\,v}{2} - \frac{\delta\,v}{2}\right)^{k-2\lambda},$$

din care deducem

$$x = (u^2 + a\,u\,v^2)^\lambda \left[\left[\left(u + \frac{a\,v}{2}\right)^{k-2\lambda} + C^2_{k-2\lambda}\left(u + \frac{a\,v}{2}\right)^{k-2\lambda-2}\left(\frac{\delta\,v}{2}\right)^2 + \cdots\right] -\right.$$

(11)
$$\left.\frac{a\,v}{2}\left[C^1_{k-2\lambda}\left(u + \frac{a\,v}{2}\right)^{k-2\lambda-1} + C^3_{k-2\lambda}\left(u + \frac{a\,v}{2}\right)^{k-2\lambda-3}\left(\frac{\delta\,v}{2}\right)^2 + \cdots\right]\right]$$

$$y = (u^2 + a\,u\,v + b\,v^2)^\lambda \left[C^1_{k-2\lambda}\left(u + \frac{a\,v}{2}\right)^{k-2\lambda-1} + C^3_{k-2\lambda}\left(u + \frac{a\,v}{2}\right)^{k-2\lambda-3}\left(\frac{\delta\,v}{2}\right)^2 + \cdots\right],$$

$$z = a\,u^2 + a\,u\,v + b\,v^2$$

unde $\lambda = 0, 1, 2, \ldots r$, r fiind egal cu $\frac{k-2}{2}$ sau cu $\frac{k-1}{2}$, după cum k este par sau impar.

Formulele (11) dau toate soluțiile întregi ale ecuației (1) când z este de forma arătată. Bineînțeles, ele nu constitue decât o parte din soluția generală, căci z poate avea și alte forme.

In lumina celor cuprinse în asest articol, trebuesc revăzute soluțiile date multor probleme din această revistă, de exemplu, 1636, 1644, 1732, etc.

TEOREME ȘI CONSECINȚE ASUPRA DISTRIBUȚIEI DE NUMERE PRIME

DE

Comandor I. LINTEȘ

Teorema I-a. *Numărul numerelor prime din șirul primelor* N *numere consecutive este*:

$$q + I_N[2.3.5.7\ldots(\sqrt{N})]$$

unde în paranteză avem primele q numere prime până la $\sqrt{N}$, iar $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din șirul primelor x numere consecutive:

Această teoremă este aproape evidentă, ținând seamă că pentru a constata dacă un număr oarecare întreg și pozitiv este prim, este suficient a încerca împărțirea lui cu toți factorii primi mai mici ca $\sqrt{N}$.

Teorema II-a. *Numărul numerelor prime cuprinse între* A *și* B *este:*

$$v = I_{A\to B}[2.3.5.7.11\ldots(\sqrt{B})] \sim I_{A\to B}[(\sqrt{B})]$$

unde $\sqrt{B}$ înseamnă numărul prim cel mai apropiat de $\sqrt{B}$, iar $A \geq (\sqrt{B})$. Dacă $A < (\sqrt{B})$, atunci se vor adăoga lui v și numărul de numere prime cuprins între A *și* $(\sqrt{B})$.

In baza primei teoreme se poate imediat stabili această teoremă.

Teorema III-a. *Intre* $n(n+1)$ *şi* $(n+1)^2$ *este cel puţin un număr prim.*

Demonstraţia acestei teoreme, care se face lesne cu ajutorul *Teoremei II*, am dat-o în *„Teoria Indicatorilor“* (pag. 99—100).

Aci voiu face o verificare.

Să notăm:

$$\alpha_1 = I_{n(n+1)}(2.3.5.7.11\ldots p_{n+1})$$

$$\alpha_2 = I_{(n+1)^2}(2.3.5.7.11\ldots p_{n+1})$$

unde p_{n+1} este numărul prim imediat inferior iui $(n+1)$.

Ştim însă că:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = I_{(n+1)}(2.3.5.7\,11\ldots p_{n+1}) = 1,$$

căci în şirul natural al numerelor consecutive până la $(n+1)$, avem — în afara numerelor prime din paranteză — numai pe 1 prim cu paranteza, deci avem *un singur* număr prim.

Apoi am:

$$I_{A\to B}(N) = I_B(N) - I_A(N)$$

înseamnă că:

$$I_{n+1}(N) = I_{(n+1)^2}(N) - I_{n(n+1)}(N).$$

Deci teorema este verificată.

Consecinţe.

2). *Intre* n^2 *şi* $n(n+1)$ *este cel puţin un număr prim.*

Avem lesne:

$$I_{n^2\to n(n+1)}[2.3.5.11\ldots(\sqrt{n+1})] =$$

$$I_{n(n+1)}[(\sqrt{n+1})] - I_{n^2}[(\sqrt{n+1})] = I_n[(\sqrt{n+1})] = 1.$$

2). *Intre patratele a două numere consecutive avem cel puţin două numere prime.*

Intre n^2 şi $n(n+1)$ avem un număr prim cel puţin şi între $n(n+1)$ şi $(n+1)^2$ iar cel puţin unul.

3). *Intre* N *şi* $(N+\sqrt{N})$ *avem cel puţin un număr prim.*

$$N = n^2 \text{ şi } N + \sqrt{N} = n(n+1).$$

4). *Intre* N *şi* $\varepsilon . N$ *avem cel puţin un număr prim, dacă* $\varepsilon = \frac{n+1}{n}$, *când* $N = n^2$.

Dacă $N = n^2$, atunci $\varepsilon . N = n(n+1)$.

Astfel mai avem:

$N \geq$	10	100	1000	10.000
$\varepsilon =$	1,31	1,10	1,03	1,01

.

Teorema IV. *In şirul primelor* N *numere consecutive avem cel puţin* $(2\sqrt{N}-1)$ *numere prime.*

Fie $N = n^2$, atunci putem forma intervalele:

$$1^2 \to 2^2 \to 3^2 \to \cdots\cdots\cdots \to (n-1)^2 \to n^2,$$

cari sunt în număr de $(n-1)$ şi în care avem cel puţin două numere prime, la care adăogând şi pe 1, avem $2n - 1 = 2\sqrt{N} - 1$.

Altă variantă a acestei teoreme:

In şirul primelor $N = 2M$ *numere consecutive, avem cel puţin* $\frac{1}{2}\varphi(N)$ *numere prime, în afară de factorii lui* N.

In adevăr, după celebra teoremă a lui *Goldbach*, în care se arată că orice număr par este suma a două numere prime impare, înseamnă că dacă: $p_1, p_2, \ldots p_n$ sunt numerele prime cu N şi mai mici ca el unde $n = \varphi(N)$ şi $p_1 = 1$, $p_n = N - 1$, avem:

$$p_1 + p_n = N$$

$$p_2 + p_{n-1} = N$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_{\frac{n}{2}} + p_{\frac{n}{2}+1} = N.$$

Dar între numerele p_i; $(i = 1, 2, \ldots n)$, vor fi cuprinse şi cele două numere prime impare, ori în acest caz trebue ca neapărat să avem până la N cel puţin $\left(\frac{n}{2}\right)$ numere prime, adică $\frac{1}{2}\varphi(N)$.

Pentru cazul când N nu este impar, atunci raţionăm pentru $(N-1)$.

Consecinţe.

1). *Intre* A *şi* B *se găsesc cel puţin* $2(\sqrt{B} - \sqrt{A})$ *numere prime.*

2). *Dacă* A *şi* B *sunt pari se găsesc cel puţin:* $\frac{1}{2}[\varphi(B) - \varphi(A)]$ *numere prime, iar dacă sunt impari, se găsesc cel puţin* $\frac{1}{2}[\varphi(B-1) - \varphi(A-1)]$ *numere prime.*

Teorema V. *Intre* A *şi* B *avem mai puţine numere prime decât între* k . A *şi* k . B *pentru* $k > 1$.

Avem:

$$v_1 = I_{A \to B}\left[2.3.5.7.11\ldots(\sqrt{B})\right]$$

şi

$$v_k = I_{kA \to kB}\left[2.3.5.7.11\ldots(\sqrt{k.B})\right].$$

Dar avem

$$v_1 = I_B\left[(\sqrt{B})\right] - I_A\left[(\sqrt{B})\right]$$

şi

$$v_k = I_{kB}\left[(\sqrt{kB})\right] - I_{kA}\left[(\sqrt{kB})\right]$$

$$= k.\left[I_B\left[(\sqrt{kB})\right] - I_A\left[(\sqrt{kB})\right]\right].$$

Trebue să arătăm acum că

$$I_B\left[(\sqrt{B})\right] < I_{kB}\left[(\sqrt{kB})\right]$$

dar $I_A\left[(\sqrt{B})\right]$ şi $I_{kA}\left[(\sqrt{B})\right]$ sunt egali cu 1, sau în cazul că $A > \sqrt{B}$ sporesc foarte puţin.

Prima neegalitate devine:

$$I_B\left[(\sqrt{B})\right] < k.I_B\left[(\sqrt{kB})\right].$$

Dacă însă avem:

$$b = I_B\left[(\sqrt{B})\right]$$

atunci

$$I_B\left[(\sqrt{kB})\right] = b - \varepsilon$$

unde

$$0 \leqq \varepsilon \leqq \sqrt{k} - 1.$$

Prin urmare avem în cel mai defavorabil caz:

$$b < k.(b - \varepsilon).$$

Dar nu trebue să uităm că $b > \varepsilon$, adică în cel mai defavorabil caz avem: $b > \sqrt{k}$. Deci, tot în cel mai defavorabil caz vom lua:

$$b = \sqrt{k} \quad \text{şi} \quad \varepsilon = \sqrt{k} - 1.$$

Aceasta ne dă:

$$\sqrt{k} < k$$

care pentru $k > 1$ este evident.

Teorema VI. *Intre* $(k-1)$ N *şi* k . N *avem mai puţine numere prime decât între* 1 *şi* $(k-1)$. N, *pentru* $k > 1$.

Avem:

$$v_{k-1} = I_{k.N}\left[(\sqrt{kN})\right] - I_{(k-1).N}\left[(\sqrt{(k-1)N})\right]$$

$$= k.I_N\left[(\sqrt{kN})\right] - (k-1)I_N\left[(\sqrt{(k-1)N})\right]$$

şi

$$v_1 = I_{(k-1)N}\left[(\sqrt{(k-1)N})\right] - 1$$

$$= (k-1)I_N\left[(\sqrt{(k-1)N})\right] - 1.$$

Dar este bine de văzut că

$$v_{k-1} < v_1$$

deoarece avem:

$$k.I_N\left[(\sqrt{kN})\right] < 2(k-1)I_N\left[(\sqrt{(k-1)N})\right] - 1$$

unde în cel mai nefavorabil caz avem neegalitatea:

$$k \leqq 2(k-1)$$

care este evidentă pentru $k > 1$.

Teorema VII (empirică). *In primele* N *numere consecutive avem în medie*

$$v = \frac{N}{2(1+\varepsilon)\log N}$$

numere prime, unde $2 \geqq \varepsilon \geqq 0$ *pentru* $N < 300.000$:

Această formuiă a fost stabilită pe cale empirică cu ajutorul unei tabele de numere prime.

NOTE MATEMATICE

30. — *Über pythagorische Zahlen.*

Ist $x^2 + y^2 = z^2$

so folgt

$$x^4+y^4+z^4 = 2(x^4+x^2y^2+y^4) = 2(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2),$$

$$x^8+y^8+z^8 = 2(x^4+x^2y^2+y^4)^2 = 2(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2)^2$$

$$= 2(x^4z^4+y^4z^4+x^4y^4),$$

$$x^{12}+y^{12}+z^{12} = 2(x^4+x^2y^2+y^4)^3 + 3x^4y^4z^4$$

$$= 2(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2)^3 + 3x^4y^4z^4$$

$$= 2(x^6z^6+y^6z^6-x^6y^6) + 9x^4y^4z^4,$$

$$x^{16}+y^{16}+z^{16} = 2(x^4+x^2y^2+y^4)^4 + 8x^4y^4(x^4+x^2y^2+y^4)^2$$

$$+ 8x^6y^6(x^4+x^2y^2+y^4)$$

$$= 2(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2)^4 + 8x^4y^4(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2)^2$$

$$+ 8x^6y^6(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2)$$

$$= 2(x^8z^8+y^8z^8+x^8y^8) + 16x^4y^4z^4(x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2)$$

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 5$$

gilt

$$3^4 + 4^4 + 5^4 = 2(15^2 + 20^2 - 12^2) = 962$$

$$3^8 + 4^8 + 5^8 = 2(15^4 + 20^4 + 12^4) = 462722$$

$$3^{12} + 4^{12} + 5^{12} = 2(15^6 + 20^6 - 12^6) + 9.60^4$$

$$= 261449282$$

$$3^{16} + 4^{16} + 5^{16} = 2(15^8 + 20^8 + 12^8) +$$

$$16.60^4 (15^2 + 20^2 - 12^2) = 156925904642.$$

JOHANNES MAHRENHOLZ

---

31. — *Câteva inegalităţi algebrice.*

In cele ce urmează, voi stabili câteva inegalităţi algebrice, plecând dela cunoscuta teoremă a mediilor.

Astfel, ţinând seamă de acea teoremă, pot scrie.

$$(1) \qquad \int_a^b x^{\frac{m}{n}}\, dx = (b-a)\,\xi^{\frac{m}{n}},$$

unde

$$b > a \quad \text{iar} \quad a < \xi < b.$$

Efectuând integrala (1), obţin:

$$\int_a^b x^{\frac{m}{n}}\, dx = \left| \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} \right|_a^b = \frac{n}{m+n} \left| x^{\frac{m+n}{n}} \right|_a^b =$$

$$\frac{n}{m+n}\left(b^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}}\right).$$

Revenind la (1), obţin:

$$\frac{n}{m+n}\left(b^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}}\right) = (b-a)\,\xi^{\frac{m}{n}}.$$

Scoţând valoarea lui ξ, obţin:

$$\xi^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{b^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}}}{b-a};$$

De unde prin ridicare la puterea $\frac{n}{m}$, obţin:

$$\xi = \frac{n^{\frac{n}{m}}}{(m+n)^{\frac{n}{m}}} \cdot \frac{\left[b\sqrt[n]{b^m} - a\sqrt[n]{a^m}\right]^{\frac{n}{m}}}{(b-a)^{\frac{n}{m}}}.$$

Dar cum am văzut că $a < \xi < b$, obţin inegalitatea:

$$a < \frac{n^{\frac{n}{m}}}{(m+n)^{\frac{n}{m}}} \cdot \frac{\left[b\sqrt[n]{b^m} - a\sqrt[n]{a^m}\right]^{\frac{n}{m}}}{(b-a)^{\frac{n}{m}}} < b.$$

Ridicând la puterea $\frac{m}{n}$, inegalitatea devine:

$$(2) \qquad a^{\frac{m}{n}} < \frac{n}{m+n} \cdot \frac{b\sqrt[n]{b^m} - a\sqrt[n]{a^m}}{b-a} < b^{\frac{m}{n}}.$$

Cazuri particulare. Făcând $n = 1$ şi lăsând m neschimbat, avem inegalitatea:

$$(3) \quad a^m < \frac{1}{m+n}(b^m + b^{m-1}a + \cdots + ba^{m-1} + a^m) < b^m$$

Dacă fac $m = 1$, am inegalitatea cunoscută:

$$a < \frac{1}{2}(b+a) < b.$$

Dacă acum presupunem că m şi n nu sunt primi intre ei şi că se divid unul prin altul astfel ca $\frac{m}{n} = k$ şi ţinând seama ca $\frac{n}{m+n} = \frac{1}{1+k}$, inegalitatea (2) devine:

$$(4) \quad a^k < \frac{1}{1+k}(b^k + b^{k-1}a + \cdots + ba^{k-1} + a^k) < b^k.$$

Dacă în inegalitatea (2) fac $m = 1$, obţin:

$$(5) \qquad a^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{1+n} \cdot \frac{b\sqrt[n]{b} - a\sqrt[n]{a}}{b-a} < b^{\frac{1}{n}}.$$

Se vede deci că inegalitatea (2), impreună cu inegalităţile (3), (4) şi (5) exprimă forma generală a unor inegalăţi interesante,

Această metodă mi-a fost sugerată de către D-l Profesor *V. Alaci*, la cursul de Analiză Matematică dela Şcoala Politechnică Timişoara.

PREDOESCU I. MARIN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, No. 5, Ianuarie 1944 $\sqrt{2}$, de *I. Ionescu*. Configuraţia formată de paralele duse printr'un punct la laturile unui triunghiu, de *A. Dobrescu*. O problemă de mecanică artileristică de *V. Vâlcovici*. Raport pentru decernarea premiului „*Nicolae G. Botea*", de *Al. Pantazi* şi *C. Ionescu-Bujor*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. „*Ştiinţă şi Progres*", Anul IX, No. 2, Decemvrie 1943. Un erou al culturii româneşti, de *Emil Pop*. De ce strălucesc stelele, de *Mircea Drăganu*. Asupra unor probleme, de *Ionel Stamate*. O problemă de construcţie, de *Paul Drăghicescu*, *Aurel Popa* şi *Gheorghe Bogdan*. Însemnări, de *G Janet* şi *A. Viciu*. Probleme propuse la examenele de admitere în liceele militare şi Colegiul Naţional „*N. Filipescu*", *de Aurel Viciu*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Dr. Dionisie Hacman*. Memoriu de activitate ştiinţifică, titluri şi lucrări.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 939. — *Într-un triunghiu* ABC *înălțimele* AA_1, BB_1 *și* CC_1 *se întâlnesc în* H. *Perpendicularele duse în* H *respectiv pe* CC_1 *și* BB_1 *întâlnesc laturile* AC *și* BC *în* M *și* N, *iar laturile* AB *și* BC *în* P *și* Q. *Să se arate când:*

1°. $$\frac{\overline{HC_1^2}\cdot\overline{B_1A}\cdot\overline{B_1M}}{\overline{HB_1^2}\cdot\overline{C_1A}\cdot\overline{C_1P}}=1;$$

2°. $$\frac{\overline{QB}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{MC}\cdot\overline{NA_1}}{\overline{PB}\cdot\overline{QA}\cdot\overline{NC}\cdot\overline{NP}}=1;$$

3°. $$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{QC}\cdot\overline{BC}}{\overline{PC_1}\cdot\overline{QB}\cdot\overline{BA}}=\frac{\overline{BB_1^2}}{\overline{B_1A^2}}.$$

TR. MARINEANU

Vom calcula lungimile din relațiunile enunțului în funcție de elementele triunghiului. Fie O centrul cercului ABC și A′ mijlocul lui BC. Se știe că

$$2\,\overline{OA'}=\overline{AH},$$

iar din triunghiul CA′O se scoate

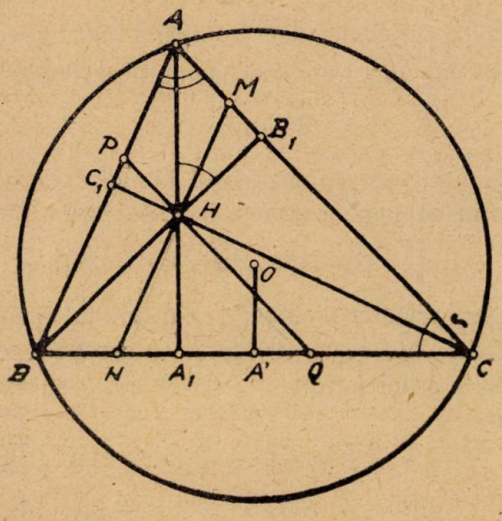
$$\overline{OA'}=\overline{OC}\cos A=R\cos A$$

deci

(1) $$\overline{AH}=2R\cos A.$$

La fel se deduc BH_1 CH.

Pe figură se vede că



$$\overline{HC_1}=\overline{HB}\cos A=2R\cos A\cos B$$

$$\overline{HB_1}=2R\cos A\cos C$$

$$\overline{AB_1}=2R\sin C\cos A$$

$$\overline{AC_1}=2R\sin B\cos A$$

$$\overline{B_1M}=\overline{HB_1}\operatorname{cotg}A=2R\frac{\cos^2A\cos C}{\sin A}$$

$$\overline{C_1P}=\overline{HC_1}\operatorname{cotg}A=2R\frac{\cos^2A\cos B}{\sin A}$$

$$\overline{QB}=\frac{\overline{HB}}{\sin C}=\frac{2R\cos B}{\sin C}$$

$$\overline{PA}=\overline{AB}-\overline{BP}=2R\frac{\cos A\cos C}{\sin A}$$

$$\overline{MC}=\frac{\overline{HC}}{\sin A}=\frac{2R\cos C}{\sin A}$$

$$\overline{NA_1}=\overline{HA_1}\operatorname{cotg}B=\frac{2R\cos^2B\cos C}{\sin B}$$

$$\overline{PB}=\frac{\overline{HB}}{\sin A}=\frac{2R\cos B}{\sin A}$$

$$\overline{QA}=\sqrt{\overline{AA_1^2}+\overline{QA_1^2}}.$$

Dar avem succesiv

$$\overline{AA_1}=b\sin C=2R\sin B\sin C$$

$$\overline{HA_1}=\overline{HB}\cos C=2R\cos B\cos C$$

$$\overline{QA_1}=\overline{HA_1}\frac{\cos C}{\sin C}=2R\frac{\cos B\cos^2C}{\sin C},$$

așa că

$$\overline{QA}=\frac{2R}{\sin C}\sqrt{\sin^2B\sin^4C+\cos^2B\cos^4C}$$

$$\overline{NC}=\frac{\overline{HC}}{\sin B}=\frac{2R\cos C}{\sin B}$$

$$\overline{HP}=\overline{HB}\operatorname{cotg}A=\frac{2R\cos B\cos A}{\sin A}$$

$$\overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=\frac{2R\cos C\cos A}{\sin C}$$

$$\overline{BC}=2R\sin A$$

$$\overline{BA}=2R\sin C$$

$$\overline{BB_1}=2R\sin A\sin C.$$

Înlocuim în relațiunile din enunt lungimile prin

valorile lor în funcţie de elementele triunghiului şi găsim condiţiile după cum urmează.

1°. Relaţiunea 1° devine

$$\cos B \sin C = \sin B \cos C$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad B = k\pi + C$$

şi cum B, C sunt unghiurile unui triunghiu, avem *numai*

$$B = C$$

adică relaţia 1° are loc *numai dacă triunghiul este isoscel.*

2°. După înlocuire, 2° devine

$$\cos^2 B \cos^4 C = \sin^2 B \sin^4 C + \cos^2 B \cos^4 C$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad \sin^2 B \sin^4 C = 0$$

deci unul din unghiurile B sau C este *nul*, sau multiplu de π, ceia ce este imposibil.

Prin urmare relaţiunea 2° nu este adevărată nici odată.

3°. Pentru 3° ajungem la condiţia

$$\operatorname{tg} A = \cos B \operatorname{tg} C$$

sau înlocuind pe *cos* B prin $\cos[\pi - (A + C)]$,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C \cos(A + C) = 0.$$

Prin urmare 3° este adevărată, numai dacă există această relaţie de condiţie între unghiurile A şi C.

Dând lui A sau C diferite valori, relaţia de condiţie precedentă poate da valori pentru C sau A, după care se poate deduce B.

Soluţia precedentă a fost trimisă la 22 Septembrie 1931 de D-l *N. N. Mihăileanu*, pe atunci elev la Lic. din Constanţa.

D-sa este singurul care a observat că enunţul este greşit, ceia ce nu a observat nici propunătorul care a plecat de la nişte triunghiuri *falş asemenea* şi a aplicat greşit teorema lui *Menelaus*. *G-l Gh. B.*

Problema 2043. — *Să se găsească toate numerile de forma a b c d e astfel ca,*

$$a + b = c, \quad a + c = d, \quad a + d = e,$$

cifrele fiind distincte între ele.

M. MANOLACHE

Soluţie. Toate cifrele fiind diferite, să luăm întâi $a = 1$, iar pentru b să luăm pe rând 2, 3, 4, 5, 6.

Atunci, în virtutea relaţiilor din enunţ rezultă că numărul cerut $a\,b\,c\,d\,e$ poate fi

(1) 12345, 13456, 14567, 15678, 16789.

Dacă luăm acum $a = 2$, pentru b putem lua pe rând 1, 3, astfel că în virtutea relaţiilor din enunţ, numărul cerut $a\,b\,c\,d\,e$ poate fi

(2) 21357, 23579.

Alte numere, conform enunţului, nu mai putem forma.

Numărul cerut $a\,b\,c\,d\,e$, poate fi oarecare din numerele din şirul (1) şi (2). Avem astfel 7 soluţii.

Soluţii date de d-ra *Georgescu Liliana* (Constanţa) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandu* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.) *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Cristea D. Viorel*, *Dăscălescu Hristache* (Lt.), *Enache Ion* (Slt.), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Giurconiu Gh. Mihail* (Tg.-Jiu), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Iacob Şt. Eugen* (Cpt.), *Ieşan Şt. Alexandru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Knopf Hermann* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Moisă I. Gh.* (Slt.), *Müţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Olteanu Gr. Ion* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Păltăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Petrovici B. Adalbert* (Lic., Brad), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Preda I. D-tru* (Lic., Slatina), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Sasu I. Gh.* (Lic., Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Ştefănescu Marin* (Lt., Brăila), *Stretea Alexandru*, *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Tuncu T. Octavian.*

Problema 2045. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 16 = 0,$$

ştiind că admite ca rădăcină pe $\sqrt[3]{3} + 1$.

ION I. LUCA

Soluţie. Ecuaţia dată admiţând rădăcina $\sqrt[3]{3}+1$, polinomul din primul ei membru se divide prin

(1) $$x - 1 - \sqrt[3]{3}$$

şi cum el este cu coeficienţi întregi, se va divide şi prin conjugata expresiei, adică prin

(2) $$(x-1)^2 + \sqrt[3]{3}(x-1) + \sqrt[3]{9}$$

şi prin urmare polinomul din primul membru al ecuaţiei date, se va divide şi cu produsul celor doi factori, primi intre ei (1) şi (2), adică se va divide prin

$$(x - 1 - \sqrt[3]{3})[(x-1)^2 + \sqrt[3]{3}(x-1) + \sqrt[3]{9}] =$$

$$(x-1)^2 - 3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 4.$$

Divizând polinomul din primul membru al ecuaţiei

date prin x^3-3x^2+3x-4, găsim câtul x^3-2x-4. Rezultă că, rădăcinele ecuaţiei date sunt acelea ale ecuaţiilor

$$x^3-2x-4=0 \text{ şi}$$

$$x^3-3x^2+3x-4=0.$$

Dar aceste ecuaţii se mai pot scri

$$(x-2)(x^2+2x+2)=0$$

$$(x-1-\sqrt[3]{3})[(x-1)^2+\sqrt[3]{3}(x-1)+\sqrt[3]{9}]=0.$$

Acum, este uşor de văzut, că rădăcinele acestor ecuaţii, deci şi ale ecuaţiei date sunt

$$\begin{cases} x_1=2 \quad x_2=-1+3i, \quad x_3=-1-3i \\ x_4=1+\sqrt[3]{3}, \quad x_5=\dfrac{2-\sqrt[3]{3}-i\sqrt[6]{3^5}}{2}, \\ x_6=\dfrac{2-\sqrt[3]{3}+i\sqrt[6]{3^5}}{2}, \end{cases}$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

Soluţii date de d-ra *Georgescu Liliana* (Constanţa), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Soare V. Mircea* (Bucureşti), *Ştefănescu Marin* (Lt., Brăila), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2052. — *Produsul a patru termeni consecutivi, întregi, a unei progresii aritmetice este 105. Să se găsească acei termeni.*

CAP. EUGEN ST. IACOB

Soluţie. Descompunând pe 105 în factori primi, avem

$$(1) \qquad 105=3\times5\times7=1\times3\times5\times7.$$

Cum 105 este produsul a patru factori consecutivi, întregi, a unei progresii aritmetice, progresia cerută poate fi

$$\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7, \text{ cu raţia } 2,$$

sau

$$\div 7\,.\,5\,.\,3\,.\,1, \text{ cu raţia } -2.$$

Dar cum factorii din (1) pot fi toţi, sau doi oare care din ei, negativi, mai putem forma încă şi următoarele progresii aritmetice, în condiţiile problemei

$$\div -1\,.\,-3\,.\,-5\,.\,-7, \text{ cu raţia } -2;$$

$$\div -7\,.\,-5\,.\,-3\,.\,-1, \text{ cu raţia } 2;$$

$$\div -5\,.\,-1\,.\,3\,.\,7, \text{ cu raţia } 4;$$

$$\div 7\,.\,-3\,.\,-1\,.\,-5, \text{ cu raţia } -4;$$

$$\div -7\,.\,-3\,.\,1\,.\,5, \text{ cu raţia } 4;$$

$$\div 5\,.\,1\,.\,-3\,.\,-7, \text{ cu raţia } 4;$$

Soluţii date de d-ra *Georgescu Liliana* (Constanţa) şi de d-nii: *Anton Ion* (Polit., Timişoara), *Barbu Virgil* (Polit. Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Bordaşiu I. Nicolae* (Beiuş), *Chiriac C.* (Lt.), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Creţa I. Gavril* (Polit., Timişoara), *Cristea D. Viorel*, *Dăscălescu Şt. Christache* (Lt.), *Enache Ion* (Slt.), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic., Tg.-Jiu), *Giurgiuman Traian*, *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Lic. Beiuş), *Ieşan Şt. Alexandru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Işfanu Teofil* (Lic. Român-Vârşeţ), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Olteanu Gr. Ioan* (Polit., Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Păläceanu D. Vasile* (Lic. Milit, Timişoara), *Petrovici-B. Adalbert* (Lic., Brad), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Sasu I. Ioan* (Lic., Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Soare V. Mircea* (Bucureşti), *Ştefănescu Marin* (Lic., Brăila), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Ţigănoiu I. Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2054. — *Să se arate că pentru* $m=\infty$, *avem:*

$$\lim\left(\frac{m^2-m-2}{m^2-4}\right)^m\cdot\lim\left(\frac{m^2+m-2}{m^2-1}\right)^m=1.$$

EMANOIL I. SARULESTEANU

Soluţie. Prima fracţie din paranteză se divide prin $m-2$, iar a 2-a fracţie se divide prin $m-1$, astfel că putem scri succesiv,

$$\frac{m^2-m-2}{m^2-4}\cdot\frac{m^2+m-2}{m^2-4}=\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{m+2}{m+1}=$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{m+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\cdot$$

De aci rezultă

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{m^2-m-2}{m^2-4}\right)^m\cdot\lim_{m=\infty}\left(\frac{m^2+m-2}{m^2-1}\right)^m=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{m=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\right]^{\frac{m}{m+1}}}\cdot\lim_{m=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\right]^{\frac{m}{m+1}}$$

$$=\frac{1}{e}\cdot e=1.$$

Am stabilit astfel relaţia cerută.

Altă soluţie. Observăm că,

$$(1)\quad \lim_{m=\infty}\left|\frac{(m^2-m-2)(m^2+m-2)}{(m^2-4)(m^2-1)}\right|^m=$$

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{m^2-m-2}{m^2-4}\right)^m\cdot\lim_{m=\infty}\left(\frac{m^2+m-2}{m^2-2}\right)^m.$$

Cum,

$$\frac{(m^2-m-2)(m^2+m-2)}{(m^2-4)(m^2-1)}=\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{m+2}{m+1}=1$$

rezultă

$$\lim_{m=\infty}\left|\frac{(m^2-m-2)(m^2+m-2}{(m^2-4)(m^2-1)}\right|^m=\lim_{m=\infty}1^m=1.$$

In virtutea relaţiei (1), egalitatea din enunţ este stabilită.

Au dat prima soluţie, d-nii; *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Belea C.* (Lic. Beiuş), *Chiriac C.* (Lt.), *Dăscălescu Hristache* (Lt.), *Enăchescu Gr. Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Georgescu C. Nicolin* (Polit., Timişoara), *Giurgiuman Traian*, *Grozescu Liviu* Polit., Timişoara), *Iosifescu Ciceron*e, *Işfanu Teofil* (Lic. Român-Vârşeţ), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Păläceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Preda I. D-tru* (Lic. Slatina) şi *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara).

Au dat soluţia 2-a, d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Nilie* (Tg.-Jiu) *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Gâţă Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Giurconiu Gh. Mihail* (Brăila), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Muţiu Antim* (Lic. Beius), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Păläceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara) *Stretea Alexandru*, *Ştefănescu Marin* (Lt.), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Ţarălungă Savel* (Lic. Internat, Iaşi), *Ţigănoiu Alexandru* (Brăila) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2057. — *Să se arate că, dacă arcele* α, β, γ *satisfac relaţia*

$$\gamma=\alpha+\beta,$$

avem

$$\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.)$$

EUGEN WEGENER

Soluţie. Vom stabili pe rând relaţiile cerute.

1°. Primul membru din relaţia întâia, ţinând seamă de relaţia din enunţ, se poate scri succesiv:

$$\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)=$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Prima relaţie este astfel stabilită.

2°. Primul membru din relaţia 2-a, ţinând seamă de relaţia din enunţ, se poate scri succesiv

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+1-$$

$$\sin^2(\alpha+\beta)=1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)^2=$$

$$1+\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)-$$

$$2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=1+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-$$

$$2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$

$$1-2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$1-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=1-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Relaţia 2-a din enunţ este astfel stabilită.

3°. Primul membru din a 3-a relaţie se poate scri succesiv, ţinând seamă de relaţia $\gamma=\alpha+\beta$,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\gamma=1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)=$$

$$2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)^2=$$

$$2-\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)-\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)+$$

$$2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$

$$2-2\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=$$

$$2[1+\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)]=$$

$$2[1+\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)]=2(1+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma).$$

Astfel, relaţia 3-a este şi ea stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bordaşiu I. Nicolae* (Beiuş), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Con-*

stantinescu N. Ilie (Lic., Brăila), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Lt.), *Enăchescu Gr. Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic. Tg.-Jiu), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Ivşanu Teofil* (Lic. Român-Vârşeţ), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Knopf Hermann* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Mesch Iosif* (Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Preda I. D-tru* (Lic., Slatina), *Şipoş Eugen* (Polit., Timişoara), *Soare V. Mircea* (Bucureşti), *Tarczewski Anton* (student, Timişoara), *Tărău Gheorghe* (Lic. Maiorescu, Bucureşti), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Vasiliu A. B.* (Lic., Chişinău).

Problema 2098 — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, de forma* $a\,b\,c\,d\,e$, *unde* $a\,b$, $b\,c$, c *şi* $a+b$ *sunt patrate perfecte.*

GHEORGHE I DEHELEANU

Soluţie. Patratele perfecte de forma $a\,b$ sunt,

(1) 16, 25, 36, 49, 64, 81

şi pentrucă $a+b$ este patrat perfect, din şirul (1), satisfac această condiţie numai

36 şi 81,

deci $a=3$, $b=6$; sau $a=8$, $b=1$.

Cum $b\,c$ şi c sunt patrate perfecte, rezultă că $b\,c$ nu poate fi de cât 64, deci $c=4$.

Patratul $a\,b\,c\,d\,e$, este deci de forma $364\,d\,e$.

Rămâne să determinăm şi cifreie d, e, pentru ca $364\,d\,e$ să fie patrat perfect.

Pentru aceasta, extragem rădăcina patrată a acestui număr, efectuăm astfel operaţia.

$$\begin{array}{r|l}\sqrt{3.64.de} & 191 \\ \hline 26.4 & 2\times 9=9 \\ 261 & 381\times 1 \\ \hline 3de & \\ 381 & \\ \hline\end{array}.$$

Ca rădăcina patrată să fie 191, trebuie ca $de=81$.

Patratul perfect cerut este astfel

$$36481=191^2.$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu I. Popescu* (Lic. Milit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Boriş V. Bosie* (Chişinău), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Deme Gheorghe* (Lic., Beiuş), *Enache Ion* (Slt.), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic., Tg.-Jiu), *Georgescu C. Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student Timişoara), *Giurconiu Gh. Mihail* (Lic., Tg.-Jiu), *Godea Ion* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Iacob Şt. Eugen* (Cpt.), *Ieşan Alexandru* (Lic., Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Iosifescu Cicerone* (Lic., Piatra-Neamţ), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Knopf* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Knopf Hermann* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Locot., Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mesch Josef* (Timişoara), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Petrovici Adalbert* (Lic., Brad), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Sasu I. Ion* (Lic., Beiuş), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara), *Ştefănescu F. Marin* (Lt.), *Stretea A. Alexandru*, *Teodorescu At. Alexandru* (Lic. Milit., Timişoara), *Tica P. Marin Gall* (Cpt.), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Wegener Eugen* (Bucureşti) şi *Wigh Jean* (Lic. Maiorescu, Bucureşti).

Problema 2105 — *Să se stabilească identitatea:*

$$\prod_{k=0}^{2}\sin^2\left|\frac{(2k+1)\pi}{6}+x\right|+\prod_{k=0}^{2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{3}+x\right)=2^{-4}.$$

V. ALACI

Soluţie. Notând cu E primul membru şi ţinând seamă de unele relaţii cunoscute în trigonometrie, putem scri

$$E=\sin^2(30^0+x)\sin^2(90^0+x)\sin^2(150^0+x)+$$
$$\sin^2 x\sin^2(60^0+x)\sin^2(120^0+x)=$$
$$\cos^2 x[\sin(30^0+x)\sin(30^0-x)]^2+$$
$$\sin^2 x[\cos(30^0-x(\cos(30^0+x)]^2.$$

Transformând în sume, produsele din parantezele mari, avem

$$E=2^{-2}[\cos^2 x(\cos 2x-\cos 60^0)^2+\sin^2 x(\cos 2x+\cos 60^0)]=$$
$$2^{-2}[\cos^2 2x(\cos^2 x+\sin^2 x)+\cos^2 60^0(\cos^2 x+\sin^2 x)-$$
$$2\cos 2x\cos 60^0(\cos^2 x-\sin^2 x)]$$

sau

(1) $E=2^{-2}(\cos^2 2x+\cos^2 60^0-2\cos^2 2x\cos 60^0)$.

Cum,

$$\cos 60^0=\frac{1}{2},\ \text{relaţia (1) devine}$$

$$E=2^{-2}\left(\cos^2 2x+\frac{1}{4}-\cos^2 2x\right)=2^{-4}.$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt., Marina Regală), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Sabău Gh. Mihiai* (Polit.), *Tinçu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2202 — Să se găsească patru numere de câte trei cifre, două începând cu 4 şi două începând cu 5, ştiind că suma lor este 1944.

G-L GH. BUICLIU

2190[1]). — Trei fraţi moştenesc o avere: primul ia $\frac{3}{10}$ din ea, al doilea ia $\frac{4}{7}$ din rest mai puţin 20000 lei, iar al treilea restul.

Dând toată moştenirea cu dobândă simplă, aceasta devine 1002000 lei după un an şi 5 luni. Dacă ar fi fost dată pe timp de 2 ani, ar fi devenit 1044000 lei.

Care a fost moştenirea, părţile fie căruia şi cu ce procent s'a făcut plasamentul? Soluţie aritmetică.

M. GHERMANESCU

2203. — Să se afle, pentru $x=y=z=1$ adevărata valoare a expresiei

$$E=\frac{\Sigma x^2+\Sigma xy-6}{\Sigma x^2-3},$$

ştiind că între x, y, z avem relaţiile,

$$\begin{cases} 4x-3y-z=0 \\ x^2+y^2-2z^2=0. \end{cases}$$

ALEXANDRU ŢIGANOIU.

2204. — Să se găsească valoarea sumei

$$S\equiv a_1 C_a^p+a_2 C_a^{p-1}C_b^1+$$

$$a_3 C_a^{p-2}C_b^2+\cdots+a_p C_a^1 C_b^{p-1}+a_{p+1} C_p^b,$$

unde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice cu raţia r. Aplicaţie: $a=b=p=n$, $a_1=1$, $r=0$.

ION KINSKY.

2205. — Se consideră dreptunghiul $OABC$ în care $OA=5\,.\,OB$. Se împart în 10 părţi egale laturile OA şi CB prin punctele de diviziune, respectiv, $A_1, A_2, \ldots, A_9$; $B_1, B_2, \ldots, B_9$.

1°. Să se demonstreze că

$$\sphericalangle B_2OB=\sphericalangle BA_7A.$$

2°. S şi s fiind respectiv suprafeţele triunghiurilor B_2OB, BA_7A, să se arate că, $S=8s$.

V. ALACI

2206. — Fie două tetraedre oarecare, $ABCD$ şi $A'B'C'D'$. Planele paralele la feţele BCD, CDA, DAB, ABC duse prin centrele de greutate ale tetraedrelor $AB'C'D'$, $BC'D'A'$, $CD'A'B'$, $DA'B'C'$ formează un tetraedru T; planele paralele la feţele $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ duse prin centrele de greutate ale tetraedrelor $A'BCD$, $B'CDA$, $C'DAB$, $D'ABC$ formează un tetraedru T'. Tetraedrele T şi T' sunt simetric egale tetraedrelor $A'B'C'D'$ şi $ABCD$ prin raport la mijlocul dreptei care uneşte centrele de greutate ale tetraedrelor $ABCD$ şi $A'B'C'D'$.

V. THÉBAULT

2207. — Să se rezolve ecuaţia

$$2^{\sin x+\sin 2x}=32^{\frac{\sin 3x}{a}}.$$

Să se determine a astfel ca toate soluţiile să fie acceptabile.

N. GAIU

2208. — Laturile unui triunghiu sunt definite de ecuaţiile

$$Ay+Bx+C=0$$

$$A_1y+B_1x+C_1=0$$

$$A_2y+B_2x+C_2=0,$$

iar raza cercului circumscris acestui triunghiu este R. Să se arate că avem:

$$2R=\frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_3 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A & B \end{vmatrix}}\times$$

$$\sqrt{(A^2+B^2)(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}.$$

CPT. A. I. STAN

[1]) Se anulează problema 2190, din No. 10 acest an şi se înlocueşte cu prezenta.

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetică

		Pag.
D. Pompeiu	Raţionamentul aritmetic . . .	111
C-dor **I. Linteş**	Teoreme şi consecinţe asupra distribuţiei de numere prime	137

b) Algebră.

Th. Angheluţă	Formarea ecuaţiei, ale cărei rădăcini, sunt valorile raportului anarmonic, ale rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al patrulea	2
D. Pompeiu	O observare la împărţirea polinoamelor	27
E. Vişa	Insumare prin părţi . . . 63,	76
M. Ghermănescu	Asupra metodei părţilor proporţionale	75
M. Ghermănescu	Ecuaţia $x^2 + y^2 = a\,z^n$ în întregi	113
I. V. Măties	Asupra formelor nedeterminate .	123
V. Alaci	Asupra formelor nedeterminate .	124
M. Ghermănescu	Ecuaţia $x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^k$ în întregi . . . . . :	135

c) Geometrie.

D. V. Ionescu	Proprietăţi ale tetraedrului . .	4

d) Trigonometrie.

C. V. Costăchescu	Aplicaţiuni ale Trigonometriei patratice	39
V. Alaci	Relaţiuni remarcabile într'un triunghiu 87,	99

e) Patrate magice.

E. H. Stern	Carrés magiques avec certains nombres donnés a des places choisies	15

f) Geometrie analitică.

D. Pompeiu	Ceca despre parabolă	1
N. Abrameseu	Metodă pentru rezolvarea unor probleme de Geometrie Analitică	29
C. Borş	Asupra unui grup ternar de involuţii pe o conică	41
R. Bouvaist	Sur certaines quadriques de révolution inscristes dans un tétraèdre	112

g) Analiză Matematică.

P. Sergescu	Asupra unei generalizări a ecuaţiilor diferenţiale omogene de ordinul întâi	28
I. Stamate	O problemă de Aplicaţii Geometrice ale Analizei Matematice	54

h) Istorie Matematică.

P. Sergescu	Şcoala Astronomică din Cracovia în veacul al XV-lea	51

II. REDACŢIONALE.

		Pag.
***	Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timişoara	13, 14

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetică şi Teoria Numerelor.

2*) 16.	**A Moessner**	Eine Tripel-Lösung zu $K_1, K_2 \ldots, K_g^n = L_1, L_2, \ldots, L_g$ für $n = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ 5, 79
8.	**G. Iuga**	Note din Teoria Numerelor . .	44
11.	**A. Moessner**	Über simultane Identitäten der Form $A_1, A_2, \ldots, A_v^k = B_1, B_2, \ldots, B_v$ für $K = 1, 2 \ldots n, n+2$	58
12.	**M. G.**	Un lanţ de egalităţi	66
15.	**A. Gloden**	Tableaux des solutions des congruences $x^2 \equiv r$ (mod 5-a) pour $\alpha = 2, 3, 4$	78
19.	**A. Gloden**	Quelques égalités multigrades vraies seulement pour des valeurs paires ou impaires de l'exposant	91

b) Patrate magice.

20.	**A. Moessner**	Magische Quadrate aus Primzahlen	92
27.	**A. I. Popescu**	Patrat magic 1944	126

c) Algebră.

1.	**Gh. Buiciu**	Asupra problemei 1776	4
4.	**St. Musta**	Formarea ecuaţiei, ale cărei rădăcini, sunt valorile raportului anarmonie, ale rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al patrulea	20
6.	**E. Arghiriade**	Asupra omografiilor care lasă neschimbată o ecuaţie de gradul al doilea	31
7.	**E. I. Şipoş**	Asupra problemei 2021 . . .	32
10.	**A. Gloden**	Un procédé simple pour obtenir une infinité de solutions entières du système diophantien $A_1^p + A_2^p + A_3^p = B_1^p + B_2^p B_3^p$ $(p = 1, 3)$	57
30.	**Johannes Mahrenholz**	Über pytagorische Zahlen	139
		Câteva inegalităţi algebrice	
31.	**Marin I. Predoescu**	Câteva inegalităţi algebrice .	142
14.	**M. I. Predoescu**	Să se afle minimul sumei : $S = x + 2\,x\,y + 3\,x\,y\,z + 4\,x\,y\,z\,t$, ştiind că : $x\,y^2\,z^3\,t^4 = k$ (constant) *(V. Alaci)*	67
18.	**A. Dobrescu**	Observare asupra unui determinant	81
22.	**A. Gloden**	Sur une méthode permettant de résoudre en nombres entiers l'équation $x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^k$ pour toute valeur entière et positive de k	104
23.	**J. Mahrenholz**	Zur unbestimmten Analysis . .	105
25.	**A. Gloden**	Formules de résolution pour l'égalité multiple $a_1, a_2, a_3, \overset{x}{=} b_1, b_2, b_3$, $(x = 2, 3)$.	
28.	**A. Gloden**	Analyse indéterminée	127

*) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

d) Geometrie.

		Pag.
3. **E. Arghiriade**	Asupra problemei 1605 . . .	20
5 **E. V. Dobrescu**	Asupra unei probleme a d-lui D. Pompeiu	21
9 **E. Arghiriade**	Asupra tangentelor lui Feuerbach	45
17. **V. Thébault**	Sur le théorème de Feuerbach .	80
21. **V. Thébault**	Sur l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle	93
24. **I. Stamate**	Relaţiuni metrice într'un triunghiu dreptunghic	105

e) Geometrie analitică.

26. **S. Musta**	**Suprafaţa** triunghiului, cunoscând ecuaţia laturilor	115
29. **S. Musta**	Volumul tetraedrului, cunoscând ecuaţiile feţelor	128

f) Analiză matematică.

13. **M. Botez**	Asupra formulei lui Holditeh .	66

IV. BIBLIOGRAFIE.

N. Abramescu	Lecţiuni de Geometrie . . .	32
P. Andronescu	Calculul vectorial	130
Th. Angheluţă	Sur deux systèmes d'équatians fonctionnelles	59
E. Arghiriade	Un théorème de Géométrie cinématique	7
E. Arghiriade	Asupra coardelor unei curbe plane	7
E. Arghiriade	Asupra transformării lui Blaschke Grünwald	7
E. Arghiriade	Asupra unei teoreme de geometrie infinitesimală	7
E. Arghiriade	Asupra centrelor de curbură la conice	7
E. Arghiriade et Al. Niculescu	Sur la conique de Rivals	7
E. Arghiriade	Sur les surfaces gauches	7
E. Arghiriade	Asupra unei quartice remarcabile a triunghiului	7
E. Arghiriade	Sur le mouvement d'une figure plane semblabement variable .	7
E. Arghiriade	Sur les cônes quadratiques osculateurs d'une courbe gauche .	7
I Armeanca	Vorläufige Bestimmung der geographischen Länge der Universitäts-Sternwarte zu Cluj-Timişoara	59
R. Bădescu	Notă asupra unei integrale definite	6
R. Bădescu	O extindere a unor proprietăţi caracteristice lănţişorului . .	6
R. Bădescu	Asupra mişcării tantocrone plane	6
R. Bădescu	Sur un procédé mixt pour résoudre les problèmes de Chauchy et de Goursat relatifs à l'équation des télégraphistes .	7
R. Bădescu	Sur l'équation fonctionnelle de Poisont généralisé	7
C. Bakonyi	Lucrări cu diferite sisteme de aparate divizionare . . .	21
A. Bărglăzan	Câmpul hidrodinamic	46
A. Bărglăzan	Contribuţiuni la determinarea numărului palatelor unei turbine	46
A. Bărglăzan	Măsurarea debitelor mici prin strangularea secţiunii de scurgere	46
A. Bărglăzan	Influenţa numărului paletelor asupra sarcinei de refulare la o pompă centrifugală . . .	46
A. Bărglăzan	Transformatorul hidrodinamic .	46
A. Bărglăzan	Turaţiile maxime şi minime posibile în cazul unei staţiuni de pomparedate	46
A. Bărglăzan	Consideraţiuni asupra unor rotori Francis realizaţi şi încercaţi .	46
E. Botiş	Memoriu de titluri şi lucrări . .	130
Buletinul Politechnicei din Bucureşti	. . . . .	82
Bulletin Scientifique	de L'École Polytechnique de Timişoara	46
G. Călugăreanu Gh. Th. Gheorghiu	Sur l'interprétation géométrique des invariants différentiels fondamentaux en géométrie affine et projective des courbes planes	6
V. G. Cavalaro	Notes sur L'Approchée représentation et construction de la Série Φ_{α}. De quelques séries hyperboliques et exponentielles de séries ayant les nombres Euleriens et Bernoulliens de nombres transcendants remarquables	46
Chestiuni de examen	Facultatea de Ştiinţe din Cluj	68
I. I. Chţulescu	Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă	59
C. V. Costăchescu	Câteva contribuţii la problema lansării	21
Gazeta Matematică	6, 21, 32, 46, 59, 68, 81, 95, 108, 116, 130	
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les courbes de Tzitzeica .	69
Gh. Th. Gheorghiu	Probleme de Algebră şi Analiză Matematică	108
M. Ghermănescu	Sur une classe d'équations fonctionnelles de premier ordre .	32
M. Ghermănescu	Sur une équation fonctionnelle	32, 1 .0
M. Ghermănescu	Probleme şi propoziţii din Dinamica punctului	46
M. Ghermănescu	Sur une équation fonctionnelle qui caractérise des polynomes	69
M. Ghermănescu	Asupra metodei părţilor proporţionale	116
Dionisie Haeman	Memoriu de activitate ştienţifică, titluri şi lucrări	
A. Koch	Die Lösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Reihen	21
I. Linteş	Teoria Indicatorilor	59
I. G. Murgulescu und E. Laţiu	O-Clorbenzoesäure als Urtritersubstanz in der Jodometrie	32
I. G. Murgulescu und E. Laţiu	Die Konduktometrische Bestimmung der Jodate mit starker Säuren	32
I. G. Murgulescu und V. Alexa	O-Chlorbensäure als Urtritersubstanz für die Acidimetrie	32
Şt. Nadaşan	Introducere în calculul îmbinărilor sudate	46
O. Onicescu	D. Pompeiu	46
C. Pârvulescu	Sur l'origine et la fin galactiques du système planétaire . . .	6

		Pag.
C. Pârvulescu	Sur les pulsations des systémes stellaires	6
V. Patriciu	Die rumänische Erdölgesetzgebung und Endwicklung der Erdölindustrie	32
D. Pompeiu	Premiul Năsturel	69
D. Pompeiu	Un problème de Géometrie . .	69
R. Rădulet	Elektrische Fehlerströme an Feuchten Wänden	46
R. Rădulet	Leistungsbedarf beim elektrischen Winderstandsschweissen . .	46
Revista Ştiinţifică	a liceului Institutului Român din Sofia	116
P. Sergescu	Despre valoarea etică a Ştiinţei .	46
P. Sergescu	Extensiunea Universitară din Cluj în Banat	46
P. Sergescu	Asupra unei generalizări a ecuaţiilor diferenţiale omogene de ordinul întâi	59
P. Sergescu	Şcoala astronomică din Cracovia în veacul al XV-lea	69
P. Sergescu	Procsele verbale ale şedinţelor cercului Matematic al Societăţii de Ştiinţe din Cluj în refugiu la Timişoara	82
I. I. Stamate	Asupra unui sistem de ecuaţii. Identităţi algebrice	7
I. I. Stamate	O problemă de Aplicaţii Geometrice ale Analizei Matematice	69
A. Stambuleanu	Studiul termodinamic al timpului admisiei la motorul termic în 4 timpi	116
M. Stepenson und I. Predoescu	Eine Methode zur Berechnung des Ölvolumes einer Lagerstätte in einer zusammenhängenden technischen Einheit	69
Ştiinţă şi Progres	. . . . .	130
V. Thébault	Triangle et tétraèdre	46

V. CHESTIUNI DE EXAMEN

Examenul de admitere în an. I. la Politechnica din Timişoara 93, 106

VI. ERATA.

— Rectificarea problemei Nr. 2023 26
— Numele autorului Nr. 8 59
— Rectificarea problemei Nr. 2081 86
— Rectificarea problemei Nr. 2148 110
— Precizări asupra problemei Nr. 1917 din Vol XX 122

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
50	110	I	
69	142	„	
110	14	II	
121	30	II	
124	46	„	
140	62	„	
175	110	II	
178	126	„	
185	126	„	
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
244	46	III	
268	78	„	
275	94	„	
291	126	„	
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
359	62	„	
376	94	„	
382	110	„	
393	126	„	
407	158	„	
411	158	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
535	30	VI	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	VIII	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
858	108	IX	82
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
924	60	„	
938	84	„	46
939	84	„	
954	108	„	
961	120	„	69
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	95
1000	36	„	
1001	36	„	
1008	48	„	
1012	48	„	
1035	84	„	130
1036	84	„	32
1037	84	„	
1043	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	138	„	
1077	138	„	
1093	24	XII	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	

1).	2).	3).	4).
1167	132	XII	
1173	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1289	36	„	
1295	36	„	
1299	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1323	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	XIV	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1405	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1490	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1514	88	„	
1516	88	„	
1530	112	XVI	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1575	24	„	
1582	36	„	
1583	36	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1600	60	„	
1604	72	„	
1613	84	„	
1615	84	„	
1618	96	„	
1621	96	„	
1622	96	„	131
1624	96	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1632	108	„	
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1643	132	„	
1645	132	„	
1651	144	„	
1652	144	„	131
1653	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1660	12	XVIII	77
1661	12	„	
1662	12	„	
1667	24	„	
1668	24	„	
1670	24	„	
1671	24	XVIII	
1672	24	„	
1676	36	„	
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1693	60	„	
1694	60	„	
1695	60	„	
1697	72	„	
1698	72	„	
1706	84	„	
1708	84	„	
1709	84	„	
1711	84	„	
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1722	108	„	
1723	108	„	
1724	108	„	
1725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1733	120	„	
1737	132	„	
1739	132	„	
1740	132	„	
1741	132	„	
1742	132	„	
1744	149	„	
1747	149	„	
1749	149	„	
1750	149	„	
1754	16	XIX	
1755	16	„	
1756	16	„	
1821	156	„	
1758	16	„	
1759	16	„	
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1767	28	„	
1865	68	XX	
1769	40	XIX	
1770	40	„	

1).	2).	3).	4)
1771	40	XIX	82
1772	40	„	
1780	56	„	
1781	56	„	
1782	56	„	59
1784	80	„	
1788	80	„	70
1789	80	„	
1790	80	„	83
1792	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1797	124	„	
1800	124	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	
1811	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1816	156	„	
1820	169	„	
1822	169	„	
1824	169	„	
	16	XX	
1825	169	XIX	60
1826	16	XX	
1829	16	„	84
1830	16	„	70
1831	16	„	72
1832	28	„	
1833	28	„	
1835	28	„	85
1836	28	„	
1838	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	
1844	44	„	95
1846	44	„	96
1847	44	„	
1849	44	„	
1850	56	„	85
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	
1857	56	„	
1858	68	„	
1860	68	„	
1861	68	„	

1).	2).	3).	4)
1862	68	XX	96
1863	68	„	116
1865.	68	„	
1767.	28	XIX	
1868	80	„	
1869	80	„	
1873	80	„	
1874	92	„	
1877	92	„	
1878	92	„	
1880	92	„	
1646	132	XVII	
1881	92	XX	
1882	104	„	
1886	104	„	
1889	104	„	
1890	116	„	117
1893	116	„	
1894	116	„	
1897	116	„	
1898	128	„	
1900	128	„	117
1901	128	„	
1903	128	„	
1905	128	„	
1906	140	„	
1907	140	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1911	140	„	117
1912	140	„	108
1913	140	„	118
1914	157	„	109
1915	157	„	
1917	157	„	
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1923	12	„	61
1924	12	„	21
			109
1925	12	„	
1926	12	„	
1927	12	„	7
1928	12	„	120
1930	12	„	
1932	24	„	
1933	24	„	109
1934	24	„	131
1935	24	„	
1936	24	„	132

1).	2).	3).	4).
1937	24	XXI.	
1938	36	„	
1939	36	„	
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	
1943	36	„	
1944	36	„	
1945	36	„	
1946	48	„	
1947	48	„	121
1949	48	„	
1950	48	„	
1951	48	„	
1952	48	„	
1953	48	„	
1954	64	„	
1955	64	„	
1956	64	„	
1957	64	„	
1958	64	„	
1959	64	„	
1960	64	„	
1961	64	„	
1962	76	„	
1963	76	„	
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1969	76	„	
1970	88	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	
1978	100	„	
1979	100	„	
1981	100	„	
1982	100	„	
1983	100	„	
1984	100	„	
1986	112	„	
1989	112	„	
1990	112	„	
1991	112	„	
1994	124	„	
1995	124	„	
1996	124	„	
1997	124	„	

1).	2).	3).	4).
1998	124	XXI	7
1999	124	„	8
2000	124	„	
2001	124	„	
2002	136	„	
2003	136	„	
2004	136	„	
2005	136	„	8
2006	136	„	22
2007	136	„	8
2008	136	„	10
2009	136	„	
2010	148	„	
2011	148	„	
2012	148	„	
2013	148	„	10
2014	148	„	11
2015	148	„	
2016	148	„	
2017	148	„	
2018	16	XXII	
2019	16	„	
2020	16	„	11
2021	16	„	11
2022	16	„	
2023	16	„	97
2024	16	„	
2025	16	„	
2026	30	„	
2027	30	„	
2028	30	„	23
2029	30	„	33
2030	30	„	34
2031	30	„	
2032	30	„	
2033	30	„	
2034	42	„	
2035	42	„	
2036	42	„	35
2037	42	„	35
2038	42	„	
2039	42	„	
2040	42	„	
2041	42	„	36
2042	54	„	
2043	54	„	
2044	54	„	
2045	54	„	
2046	54	„	
2047	54	„	
2048	54	„	
2049	54	„	
2050	66	„	

1).	2).	3)	4).
2051	66	XXII	
2052	66	„	
2953	66	„	
2054	66	„	
2055	66	„	
2056	66	„	
2057	66	„	
2058	78	„	
2059	78	„	
2060	78	„	
2061	78	.	47
2062	78	„	
2063	78	„	
2064	78	„	
2065	78	„	
2066	90	„	37
2067	90	„	23
2068	90	„	24
2069	90	„	48
2070	90	„	
2071	90	„	37
2072	90	„	
2073	90	„	
2074	102	„	
2075	102	„	
2076	102	„	24
2077	102	„	
2078	102	„	
2079	102	„	
2080	102	„	
2081	102	„	
2082	114	„	25
2083	114	„	49
2084	114	„	25
2085	114	„	132
2086	114	„	
2087	114	„	
2088	114	„	25
2089	114	„	49
2090	126	„	

1).	2).	3).	4).
2091	126	XXII	
2092	126	„	
2093	126	„	
2094	126	„	
2095	126	„	
2096	126	„	
2097	126	„	133
2098	138	„	
2099	138	„	
2100	138	„	
2101	138	„	
2102	138	„	
2103	138	„	
2104	138	„	
2105	138	„	
2106	150	„	
2107	150	„	
2108	150	„	
2109	150	„	
2110	150	„	
2111	150	„	
2112	150	„	
2113	150	„	
2114	12	XXIII	
2115	12	„	
2116	12	„	
2117	12	„	
2118	12	„	
2119	12	„	
2120	12	„	
2121	12	„	
2122	26	„	
2123	26	„	
2124	26	„	
2125	26	„	
2126	26	„	
2127	26	„	
2128	26	„	
2129	26	„	

1).	2).	3).	4)
2130	38	XXIII	
2131	38	„	
2132	38	„	
2133	38	„	
2134	38	„	
2135	38	„	
2136	38	„	
2137	38	„	
2138	50	„	
2139	50	„	
2140	50	„	
2141	50	„	
2142	50	„	
2143	50	„	
2144	50	„	
2145	50	„	
2146	62	„	
2147	62	„	
2148	62	„	
2149	62	„	
2150	62	„	
2151	62	„	
2152	62	„	
2153	62	„	
2154	74	„	
2155	74	„	
2156	74	„	
2157	74	„	
2158	74	„	
2159	74	„	
2160	74	„	
2161	74	„	
2162	86	„	
2163	86	„	
2164	86	„	
2165	86	„	
2166	86	„	
2167	86	„	
2168	86	„	
2169	86	„	

1).	2).	3).	4)
2170	98	XXIII	
2171	98	„	
2172	98	„	
2173	98	„	
2174	98	„	
2175	98	„	
2176	98	„	
2177	98	„	
2178	110	„	
2179	110	„	
2180	110	„	
2181	110	„	
2182	110	„	
2183	110	„	
2184	110	„	
2185	110	„	
2186	122	„	
2187	122	„	
2188	122	„	
2189	123	„	
2190	123	„	
	146	„	
2191	123	„	
2192	123	„	
2193	134	„	
2194	134	„	
2195	134	„	
2196	134	„	
2197	134	„	
2198	134	„	
2199	134	„	
2200	134	„	
2201	146	„	
2202	146	„	
2203	146	„	
2204	146	„	
2205	146	„	
2206	146	„	
2207	146	„	
2208	146	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abel, 3.
Abramescu N., 13, 21, 29, 32, 38, 46, 50, 69, 81, 130.
Adam D. R., 13.
Adamescu M., 13.
Alaci V., 1, 12, 13, 15, 22, 26, 27, 38, 39, 46, 50, 51, 54, 59, 62, 63, 67, 69, 72, 74, 75, 81, 86, 87, 98, 99, 110, 110, 117, 118, 119, 120, 122, 123, 124, 134, 135, 140, 145, 146.
Albert, 51.
Aldea V. M., 86, 116, 131.
Alexa V., 32.
Alhazen, 51.
Almăjan P., 13.
Anastasiade I., 13.
Andronescu P., 13, 68, 81, 130.
Angheluță Th., 2, 3, 13, 31, 46, 57, 59, 81, 86.
Aniţescu N. N., 131.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Anton I., 9, 10, 11, 12, 23, 25, 26, 34, 35, 37, 38, 48, 49, 74, 98, 133, 134, 142, 143, 144, 145.
Archimede, 46.
Ardelean Şt., 13.
Arghiriade E., 7, 13, 20, 26, 32, 45, 46.
Aristotel, 51.
Armeanca I., 59, 81.
Atanasiu V., 130.
Avramescu A., 82.

Băcicov V., 47, 70.
Băcicov P. V., 47.
Bacon R., 51.
Bădescu R., 6, 7, 13, 46.
Baidaff B. I., 13.
Bakonyi C., 13, 21.
Bakonyi C., 10, 84 ,85, 86, 96, 109, 118, 120, 132.
Bănărescu M., 13.
Barnowski I., 54.
Barbelian D., 116.
Barbu V., 11, 12, 23, 34, 35, 37, 62, 142, 143, 144.
Barcalaşiu I. N., 35.
Bărglăzan A., 13, 46.
Baron C., 13.
Becu C., 117.
Bolcot C., 82.
Balea C. G., 26, 34, 133, 144.
Beneş P., 13.
Biem M., 53.
Bitang A., 9, 11, 12, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 37, 38, 48, 49, 133, 142, 143, 144, 145.
Blaschke, 7, 60.
Blaşian V., 13.
Bobârnac M., 13.
Boerescu P. G., 109, 110.
Boeriu V., 95.
Bogdan G., 140.
Boleanţu L., 74, 110.
Bonea I., 13.
Bordaşiu I. N., 11, 25, 26, 35, 49, 50, 133, 143, 144.
Borş C., 32, 41, 60.
Bossie V. B., 50, 145.
Botea G. N., 140.
Botez M., 7, 9, 13, 23, 26, 67, 97, 110, 131.
Botez M., 13.
Botiş E., 130.
Bouvaist R., 112.
Bratu D., 116.
Bratu E., 82.
Buicliu Gh., 5, 7, 12, 13, 21, 26, 33, 38, 45, 47, 50, 62, 70, 74, 82, 86, 95, 98, 110, 122, 130, 131, 134, 142, 146.
Bunescu A., 46, 59, 68.
Burghiu D. I., 11, 12, 34, 36.
Burdian I., 52.
Bylica M., 52.

Călniceanu C., 13.
Călugăreanu G., 6, 13, 81.
Cândea C., 13, 46.
Carmichael, 127.
Cârstoiu I., 82.
Casimir C. Mare, 51.
Catona V., 13.
Cauchy, 3, 7, 76.
Cavalaro G. V., 46.
Caylei, 46.
Cazalas E., 19.
Celtis C., 52.
Cerchez M., 97.
Cernescu N., 82.
Cetăţeanu S., 73, 74, 116.
Chasles, 81.
Checian Ana, 118.
Chiriac C., 11, 12, 23, 24, 25, 26, 35, 37, 38, 48, 49, 121, 133, 134, 142, 143, 144, 145.
Chircoiaşu V. N., 130.
Chiţulescu I. I., 59.
Ciobanu I., 32.
Claudian V., 13.
Coca A., 13.
Colesnic I. D., 49, 134.
Coma A., 13.
Comănescu A., 13.
Comberousse, 31.
Constantinescu G. V., 13, 81, 114.
Constantinescu G., 13.
Constantinescu N. I., 142, 143, 144, 145.
Contrea A., 13.
Copernic, 53, 54.
Coşniţă C., 33, 69, 95, 130.
Costăchescu V C., 13, 21, 38, 39, 108.
Cotariu D. M., 86, 98.
Creţa F. G., 11, 12, 22, 23, 25, 26, 34, 35, 37, 38, 133, 142, 143, 144, 145.
Creţoiu P., 82.
Cristea D. V., 11, 22, 35, 142, 143.
Cristea I. C., 84.
Cristescu I., 13.
Cristescu I., 59.
Cristodulo N., 13, 46.
Cserveny I., 13.
Curea I., 13, 37.
Curileanu D., 82.

Dăscălescu S. H., 23, 34, 35, 37, 113, 142, 143, 144, 145.
Deaux R., 81.
Deheleanu G., 109, 110, 145.
Deme G., 26, 35, 49, 145.
Demetrescu G., 13.
Diaconescu N., 13.
Dobrescu A., 81, 140.
Dobrescu V. E., 8.
Dobrozemski M., 13.
Drăgan M., 140.
Drăghicescu P., 140.
Drăgulescu C., 46.
Duchêsne R., 130.
Dumitrescu A. Elena, 47.
DumitrescuD., 82.
Dumitriu Dada, 13.
Dürer A., 15.

Enache I., 142, 143.
Enăchescu G. I., 8, 10, 11, 23, 25, 26, 34, 35, 36, 37, 38, 48, 49, 84, 85, 96, 109, 132, 134, 142, 143, 144, 145.
Erasmus, 52.
Euclid, 51.

Facsko I. G., 86.
Fasie N. V., 122.
Fermat, 44, 113.
Feuerbach, 45, 80.
Florescu B. I., 116.
Florescu M., 13.
Fontani V., 53.
Foti V., 116.
Francon, 51.
Frăţici I., 13.

Galilei G., 32, 51, 130.
Gaiu N., 110, 146.
Gâţă G. G., 11, 25, 26, 35, 38, 49, 86, 96, 117, 134, 142, 143, 144, 145.
Georgescu Liliana, 142, 143.
Georgescu C. N., 25, 26, 34, 35, 37, 49, 133, 134, 144, 145.
Georgescu D., 13.
Georgescu V., 116.
Gergonne, 33.
Gheorghiu A., 130.
Gheorghiu Th. Gh., 6, 13, 69, 108, 131.
Gheorghiu Ş., 21.
Gheorghiu V., 13.
Ghermănescu M., 12, 13, 32, 46, 50, 61, 62, 66, 69, 75, 82, 86, 113, 116, 122, 130, 135, 146.
Ghimuş A. D., 122.
Ghişa V. E., 32.
Ghişoiu I. P., 82.
Ghiţescu Sp., 13.
Giurconiu G. M., 142, 144, 145.
Giurgiuman T., 143, 144.
Gloden A., 13, 15, 58, 61, 70, 79, 82, 92, 105, 115, 116, 128, 131, 132, 135, 136.
Gligor N. I., 7, 8, 21, 34, 109, 110, 121, 122, 132, 134, 145.
Godea I., 11, 12, 23, 25, 26, 34, 35, 37, 38, 48, 49, 50, 133, 142, 143, 144, 145.
Goga F., 10, 35, 132.
Goldbach, 138.
Goormaghtigh R., 80.
Goursat, 7.
Grigore, 51.
Grigoriu N., 54.
Grozescu L., 8, 10, 12, 23, 25, 26, 35, 37, 38, 48, 49, 74, 109, 110, 132, 133, 134, 143, 144, 145.

Grünwald, 7.
Gryzcuala A., 52.
Grzepski S., 53.

Hacman D., 140.
Halley E., 21.
Haret Spiru, 6.
Hell M., 108.
Herman V., 13.
Hermann I. C., 131.
Hermite, 111.
Holditch, 66.
Hompola T., 83.
l'Hôpital, 123, 125.
Hristea H., 13.

Iacob C., 81.
Ieşan S. A., 23, 25, 26, 49, 98, 142, 96, 134, 142, 143, 145.
Ieremia I. A., 23, 34, 35.
Ieşan S. A., 23, 25, 26, 69, 98, 142, 143, 145.
Ilie D. M., 82.
Iliovici G. C., 123, 124, 125.
† Ioachimescu G. A., 32, 46, 59.
Ionescu-Biss P. H., 13.
Ionescu-Bujor C., 13, 33, 59, 95, 140.
Ionescu I., 21, 59, 116, 120.
Ionescu F. P., 9, 12, 22, 25, 26, 35, 37, 38, 49, 96, 98, 117, 122, 134, 142, 143, 145.
Ionescu-Ţiu D. C., 13.
Ionescu D. V., 4, 13, 20, 46, 59, 82.
Iosifescu C., 8, 25, 26, 35, 122, 133, 144, 145.
Işfanu T., 143, 144, 145.
Ivănescu C., 13, 33, 70, 95.
Iuga G., 59.

Jagello W., 51.
Jidanu I. C., 70, 83, 86, 131.

Kielburger M., 13.
Kinsky I., 12, 22, 23, 26, 34, 37, 38, 48, 49, 133, 143, 144, 145, 146.
Knopf A., 25, 26, 35.
Knopf H., 25, 35, 110, 142, 145.
Koch A., 21.
Kottermak G., 52.
Prol M., 52.
Kühn I., 13.

Lagrange, 2, 3, 135.
Laguarta G. E., 81.
Lalescu T., 54.
Lascu Bal, 14.
Laţia P. C., 70.
Laţiu E., 32.
Laţiu V., 14.
Legendre, 116.
Lehmann P. M., 15.
Lemoine E., 80.
Leonida D., 14.
Linteş I., 14, 21, 46, 59, 81, 82, 116, 130, 147.
Liteanu G., 14.
Loziciu I., 12.
Luca I. I., 7, 8, 11, 12, 22, 23, 25, 26, 35, 37, 38, 109, 110, 122, 134, 142, 144.
Luca L. L., 11, 22.
Lucaş, 33.
Lupau A., 14.
Lupescu C., 9, 10, 23, 34, 35, 37, 85, 98, 131, 145.

Mach, 27.
Macovschi E., 14.
Mahrenholz J., 8, 10, 11, 12, 22, 23, 24, 25, 26, 35, 37, 38, 48, 49, 50, 62, 82, 98, 105, 109, 118, 121, 132, 134, 140, 143, 144, 145.
Malapert C., 54.
Maliţa A. M., 98.
Mang Ileana, 7, 72, 96, 109.
Manolache C. M., 8, 10, 11, 22, 23, 35, 37, 38, 109, 110, 121, 142, 143, 144, 145.
Manughevici C., 14.
Mărculescu O., 14.
Mardan D., 14.
Marian V., 32, 108, 131.
Marineanu T., 141.
Marinescu I., 14.
Mateescu S., 14.
Măţieş V. I., 6, 38, 50, 62, 98, 122, 123, 124, 125, 126.
Menelaus, 142.
Mereuţă E., 14.
Mesch I., 26, 38, 145.
Miclea N., 98.
Mihăileanu C. A., 131.
Mihăileanu N. N., 14, 33, 47, 70, 95, 142.
Mihailescu C., 23.
Mihalcu I. I., 109.
Mihoc N. O., 84.
Mioc V., 14.
Modâlcă S., 131.
Moessner A., 6, 59, 80, 91, 92.
Moise I. G., 34, 95, 142.
Montel P., 81.
Mordell T. L., 113.
Moutard, 81.
Murariu P., 14.
Murgulescu Elena, 14.
Murgulescu G. I., 14, 32, 46.
Musta S., 14, 21, 84, 96, 116.
Muţiu A., 11, 12, 23, 24, 25, 26, 35, 37, 38, 49, 50, 133, 134, 142, 143, 144, 145.
Myller A., 68.

Nadaşan S., 1, 14, 15, 27, 39, 51, 63, 75, 87, 99, 111, 123, 135.
Nagel, 33.
Naneş Cornelia, 7, 121.
Naneş G., 14.
Necula C. I., 38.
Negrea A. M., 60, 85, 96, 121, 131, 132.
Neuberg J., 113.
Newton I., 21.
Nicolau A., 14.
Nicolau P., 14.
Niculescu A., 7, 59.
Noguès R., 113.

Ogrin N., 14.
Olteanu G. I., 26, 35, 142.
Onicescu O., 14, 46, 81, 116.
Opran C. C., 11, 23.
Orăşeanu C., 14.
Orăşeanu G., 14.
Oresme N., 51.

Păläceanu D. V., 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 37, 38, 49, 83, 86, 96, 133, 134, 142, 143, 144, 145.
Pantazi A., 59, 116, 140.
Papadopol D. Elena, 25.
Parteni-Antoni C., 82.
Pârvulescu C., 6.
Păsculescu M. V., 47, 95.
Patriciu V., 14, 32.
Patt I. M., 11, 12, 23, 26, 34, 35, 38, 48, 49, 133, 134, 142, 143, 144, 145.
Pavel D., 82.
Petrescu A., 14.
Petrovici A., 25, 35, 142, 143, 145.
Penrbach, 53.
Picard Sophie, 81.
Piţulescu G., 86.
Pompeiu D., 1, 6, 21, 27, 46, 69, 81, 87, 98, 111, 116.
Pop E., 26, 85, 140, 145.
Pop L., 33, 47, 95, 131.
Popa A., 140.
Popescu E., 14.
Popescu I. A., 6, 8, 23, 24, 26, 35, 37, 47, 74, 109, 127, 132, 134, 142, 143, 144.
Popescu I. B., 142, 145.
Popescu I. G., 108.
Popescu I., 14.
Popescu Maria, 9, 11, 35.
Popescu C. N., 60, 84, 85, 96.
Popescu I. N., 14.
Popinceanu N. 82.
Popovici C., 81.
Popovici T., 82.
Preda I. D., 8, 10, 12, 23, 35, 37, 109, 142, 144, 145.
Predoescu I. M., 14, 68, 69, 140.
Protopopescu I., 14.
Ptolemeu, 51.
Purcariu I., 14.
Purdilă A., 47, 70.

Racliş N. R., 14.
Radoslav I. G., 72, 85.
Răduleţ R., 14, 46.
Regiomontanus, 52.

Riemann, 81.
Rizescu I., 48.
Roibănescu C., 14.
Rolle, 133.
Romaine A., 54.
Roşca G., 95.
Roşu A. A., 32.
Rusu D. C., 47.

Săbău C., 8, 23.
Săbău G. M., 25, 26, 34, 35, 38, 49, 98, 110, 122, 132, 133, 134, 142, 144.
Samosarski B., 52.
Şandor V., 131.
Săruleşteanu I. E. 131, 133, 143.
Sasu I. I., 12, 25, 35, 37, 142, 145.
Sauciuc L., 14, 46.
Savin C. I., 14.
Scărlătescu D., 14.
Schapira S., 109.
Schelyuk I., 53.
Schileru I., 14.
Schram Edith, 14.
Scorpan A., 14.
Segal Z., 131.
Sergescu P., 14, 28, 32, 46, 51, 54, 56, 57, 59, 69, 82.
Severineanu C., 14.
Sforza B., 52.
Sigismund I., 52.
Simionescu D. G., 14, 95.
Simon S. P., 60, 85, 86, 96.
Şipoş I. E., 8, 9, 11, 12, 23, 24, 25, 26, 32, 34, 35, 37, 38, 49, 50, 62, 109, 110, 122, 132, 133, 134, 142, 143, 144, 245.
Smighelschi O., 14.
Soare M., 25, 26, 37, 143, 145.
Soula J., 81.
Staicu C., 9.
Staicu I. V., 131.
Stamate I. I., 7, 10, 14, 32, 36, 49, 54, 68, 69, 107, 109, 117, 131.
Stamatescu I., 14.
Stambuleanu A., 14, 116.
Stan A., 14, 95, 146.
Stănescu C., 14.
Stantzel E., 14.
Ştefănescu M., 11, 23, 35, 48, 50, 74, 131, 142, 143, 144, 145.
Steiner, 80.
Stephenson M. 69.
Stern H. E., 15.
Stobner, 51.
Stoenescu A., 32, 46, 68, 81.
Stoica D., 32.
Stoilov S., 81.
Stoicescu L., 14.
Stoicescu M., 14.
Stolz, 52.
Stretea A., 133, 142, 144, 145.
Süli A. M., 47, 70, 95.
Sylvius A., 53.
Szymanski P., 81.

T. G., 116.
Tănăsescu A. G., 59.
Tănăsescu T., 82.
Ţarălungă D., 133.
Ţarălungă S., 109, 110, 144.
Tărău G., 145.
Tarczevski A., 8, 23, 145.
Tarry G., 79.
Tarţa Valeria, 98, 133.
Tcheibchef, 81.
Teodorescu A. A., 145.
Teodorescu C., 14.
† Teodorescu V. N., 21.
Teodosiu A., 14.
Thébault, 12, 46, 61, 62, 74, 81, 86, 95, 110, 134, 146.
Teixeira F. G., 54.
Tica P. M. Gall, 60, 84, 145.
Ţigănoiu A., 23, 35, 37, 48, 110, 122, 134, 143, 144, 145, 146.
Tilică C. S., 60, 84, 85, 131.
Tincu, C., 98, 134, 142, 143, 144, 145.
Tino O., 14, 46, 68, 69, 86.
Ţiţeica Gabriela, 32, 81.
Ţiţeica G., 68, 81, 95.
Toporescu E., 82.
Torquetum, 51.
Tuncu T. O., 142.
Turicu T. O., 11, 23, 35.
† Tutuc I., 130.

Vâlcovici V., 6, 14, 46.
Vandermonde, 46.
Vasiliu A., 130.
Vasiliu A. B., 11, 35, 37, 145.
Vasiliu G. D., 22, 96, 109, 117.
Vasiliu C. I., 68, 116.
Vasu V., 70.
Velicescu N. N., 46.
Vescan T., 130.
Viciu A., 14, 140.
Vişa E., 14, 38, 62, 63, 74, 76, 98.
Vlad I. V., 14.
Vlădescu I., 14.
Voicu A., 131.
Vonica C., 47.
Voştinariu G., 84.
Vrânceanu G. G., 25.

Weber M., 14.
Wegener E., 8, 9, 10, 11, 12, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 37, 48, 49, 50, 60, 72, 84, 85, 97, 98, 109, 118, 120, 121, 132, 133, 134, 143, 144, 145.
Wigli J., 48, 49, 145.
Witelo, 51.
Wotka N., 52.
Woeffing E., 70.
Woitech, 35.
Wojewodka B., 53.
Wolmar I., 52.

Zăgănescu I., 14.
Zaharia N. O., 14.
† Zamfirescu C. G., 68.
Zamfirescu I. G., 15, 108, 130.
Zapan G., 14
Zarankiewier M., 81.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Profesor *Vasile Mioc*, asistent la Şcoala Politehnică şi Director la lic. Diaconovici Loga, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Costul abonamentului la „Revista Matematică din Timişoara", pentru anul XXIV (1 Martie 1944—1 Martie 1945), este de 350. (trei sute cincizeci lei). Un număr 40 lei.

Rugăm pe corespondenţii noştri a ne trimite din timp costul abonamentului pentru a nu întrerupe expedierea pentru anul ce începe la 1 Martie 1944.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Birănaş T. Ioan, (2124, 2164, 2174); **Bolcaş Victor,** (2160, 2196); **Bossie V. Boriş,** (2039, 2122, 2134, 2187, 2191, 2192, 2193, 2196, 2198); **Cherdivarencu Ioan,** (2165, 2175); **Cicerone Gh.,** (P; 2098, 2139); **Cotariu D. Marcel,** (N; P; 2170, 2174, 2176, 2181, 2183, 2186, 2187, 2188, 2191, 2192, 2195, 2196, 2198); **Constantinescu I. Ilie.** (P; 2097, 2116, 2124, 2136, 2173, 2176, 2181, 2185, 2187, 2191, 2192); **Creţa F. Gavril,** (P.); **Enache Ion,** (2141, 2672, 2097, 2120, 2139, 2155, 2164, 2169, 2170, 2181, 2185); **Filimon Ioan,** (2196); **Giurconiu Gh. Mihail,** (1938, 1956, 2002, 2082, 2131); **Gligor N. Ioan,** (N.); **Godea I.,** (2025, 2115, 2130, 2141, 2149, 2187, 2188, 2191, 2192, 2193, 2196, 2198, 2199); **Goldiş T. Gheorghe,** (2115, 2120, 2121, 2130, 2162, 2164, 2168, 2173, 2181); **Grozescu C. Liviu,** (P.); **Maliţa Mircea,** (2116, 2144, 2155, 2191, 2193); **Mahrenholz Johannes,** (2053, 2186, 2187, 2191, 2192, 2193); **Miclea Nicolae,** (2125, 2138, 2141, 2162, 2164, 2181, 2198); **Munteanu Gh. Lucian,** (P; 2176, 2181); **Muţiu S. Antim,** (2025, 2033, 2081, 2096, 2105, 2114, 2116, 2124, 2130, 2135, 2139, 2149, 2154, 2166, 2174, 2175, 2180, 2183, 2185, 2187, 2191, 2193, 2196, 2198, 2199); **Niţă M. Mihai,** (2164); **Pat I. Moise,** (2034, 2056, 2094, 2095, 2105, 2112, 2141, 2148, 2150, 2180, 2181, 2182, 2183, 2185, 2188, 2191, 2192, 2196); **Păläceanu D. Vasile,** (2180, 2181, 2182, 2187, 2188, 2190, 2192, 2193); **Rădoiu N. Nicolae,** (P.); **Rogoz V. Ioan,** (2186, 2196); **Stan A. C-tin,** (N.); **Stretea I. Alexandru,** (2096, 2164, 2176, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185); **Szabo V. Iuliu,** (P; 2155, 2187, 2188, 2191); **Tincu C-tin,** (P; 2059, 2085, 2131, 2136, 2144, 2187, 2191, 2192, 2193, 2196); **Thébault V.,** (P.); **Tudor Aurel,** (2116, 2124, 2136, 2139, 2146, 2155, 2162, 2169, 2170, 2176, 2180, 2181, 2182, 2185, 2187, 2188, 2190, 2191, 2192, 2193); **Ţigănoiu Alexandru,** (A; P; 1699, 1727, 1735, 1738, 1746, 1751, 1757, 1779, 1783, 1785, 1799, 1817, 1827, 1837, 1845, 1856, 1876, 1883, 1887, 1895, 1896, 1900, 1906, 1914, 1947, 2188, 2191, 2192, 2193, 2196, 2198); **Vrânceanu G. G.,** (2186, 2191, 2192, 2193); **Wegener Eugen,** (P; 2187, 2188, 2189, 2191, 2192).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIII, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

BIBLIOTECA ASTRA
SIBIU